Pozorovatelnost.

Uvažujme nyní obecnou nelineární rovnici

$$x' = f(x) \tag{10}$$

a definujme ,,pozorovanou veličinu"

$$y = g(x), \tag{11}$$

kde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Opět obvykle platí $m < n$, tj. pozorování obsahuje méně informace než celý systém.

Definice. Řekneme, že rovnice (10) je pozorovatelná skrze veličinu (11), jestliže pro libovolná dvě řešení x_1, x_2 a čas $t > 0$ platí:

$$g(x_1) = g(x_2) \text{ na } [0,t] \qquad \Longrightarrow \qquad x_1(0) = x_2(0).$$

Poznámka. Vzhledem k jednoznačnosti řešení je závěr implikace $x_1(0) = x_2(0)$ ekvivalentní tomu, že řešení se shodují na celém intervalu $[0,t]$.

Úlohy na pozorovatelnost lze opět řešit na základě elementárních úvah. V lineárním případě lze situaci vyřešit obecně; navíc se ukazuje, že pozorovatelnost je v jistém smyslu duální pojem k regulovatelnosti.

Věta 3. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou konstantní matice. Potom rovnice*

$$x' = Ax \tag{12}$$

je pozorovatelná skrze

$$y = Bx, \tag{13}$$

právě když rovnice

$$x' = A^T x + B^T u$$

je globálně regulovatelná.

Důsledek. *Rovnice* (12) *je pozorovatelná skrze* (13)*, právě když $\mathcal{K}(A^T, B^T)$ má hodnost n.*

Příklad 5. Najděte nutnou a postačující podmínku na čísla a_{ij}, aby systém

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

byl pozorovatelný skrze veličinu x.

Řešení. V souladu s předchozí větou máme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathcal{K}(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix};$$

tato matice má požadovanou hodnost 2, právě když $a_{12} \neq 0$.