Řešte úlohy na regulovatelnost.

1. Dokažte, že uvedené body $\tilde{x}$ neleží v oboru regulovatelnosti příslušných systémů:

(a) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$

$$x' = u$$
$$y' = \cosh x$$

(b) $\tilde{x} \in R^2 \setminus (0,0)$

$$x' = xy^2u$$
$$y' = x^2yu$$

(c) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$

$$x' = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - uy^2$$
$$y' = xy\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + u\right)$$

pro $(x,y) \neq (0,0)$; jinak $x' = y' = 0$.

(d) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y > 1\}$

$$x' = \begin{cases} \frac{u}{x^2+y-1}, & x^2 + y \neq 1 \\ 0, & x^2 + y = 1 \end{cases}$$
$$y' = x^2 + u^2$$

2. Nalezněte množinu regulovatelnosti soustav:

(a)

$$x' = xy$$
$$y' = \begin{cases} \frac{u^2}{x+y-1}, & x + y \neq 1 \\ 0, & x + y = 1 \end{cases}$$

(b)

$$x' = \cos(xy)$$
$$y' = \cos x + u$$

3. Určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = xyu$$
$$y' = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} y.$$

Jak, pokud vůbec, se tato množina změní bez požadavku esenciální omezenosti funkce u?

4. Aniž byste hledali přesná řešení, navrhněte regulační postup (globálně regulovatelného) systému

$$x' = \sin y$$
$$y' = x + u.$$

5.

$$\begin{aligned} x' &= -x + z \\ y' &= y - z + u \\ z' &= -y + z - u \end{aligned}$$

6. Pro jakou volbu vektoru $(a, b) \in R^2$ jsou následující systémy globálně regulovatelné?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} u$$

Matici A volíme postupně jakožto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkuste výsledek nejprve uhodnout (resp. odůvodnit intuitivně) na základě chování systému bez regulace (tj. pokud $u = 0$).

7. Ukažte, že rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = u$$

je globálně regulovatelná.

8. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a matice regulací B je tvaru

(a)

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

9. Nechť $n \in \mathbb{N}$. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a matice regulací B je tvaru

(a)

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

10. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

11. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

12. Ukažte, že následující systém je lokálně regulovatelný v počátku:

$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 + u \\ y' &= \sin z + u^2 \\ z' &= x + \sin y + \cos z - 1 \end{aligned}$$

13. Zobecněte znění věty o lokální regulovatelnosti tak, aby výsledkem byla regulovatelnost rovnice na okolí předem daného bodu $\tilde{x}$. Tuto pak aplikujte na důkaz regulovatelnosti následujících systémů na okolí příslušných bodů $\tilde{x}$. V některých případech bude nutno určit správné hodnoty parametrů $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) $\tilde{x} = (\pi/2, 0, \pi)$

$$\begin{aligned} x' &= \sin(\alpha y z) + u^2 \\ y' &= \cos x + \beta u \\ z' &= \operatorname{cotg} x + \cos y + \sin z + \gamma \end{aligned}$$

(b) $\tilde{x} = (1, 1)$

$$\begin{aligned} x' &= -\beta x y + y^\alpha + \beta e^{\frac{\alpha u}{\beta}} - \beta^2 + (\alpha - 1)(\alpha + 1) \\ y' &= \alpha x - 3 + \beta u \end{aligned}$$

(c) $\tilde{x} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (-\pi/2, \pi/2) \wedge x - y = \frac{\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \sin x - \beta \cos y - u^2 \\ y' &= \sin^2 x + \beta \cos^2 y + u \end{aligned}$$

(d) $\tilde{x} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4 \wedge xy \geq 0\}$

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 + ux \\ y' &= e^{x^2 + y^2} + uy \end{aligned}$$