Návody a řešení.

1) (a) $y' \geq 1$.

(b) Lze si povšimnout $(x^2 - y^2)' = 0$, a proto ihned vyloučíme body (x, y) nevyhovující rovnici $x^2 = y^2$ (viz Obrázek 1). Neregulovatelnost (1-dimenzionální) rovnice $x' = x^3 u$ se ukáže integrací a užitím esenciální omezenosti u.

(c) Po přechodu do polárních souřadnic, k němuž nabádají radiální členy, získáme

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{r}(1 - \sqrt{r}) \cos \omega \\ \omega' &= r u \sin \omega. \end{aligned}$$

Pronikne-li tedy řešení na jednotkovou kružnici, již ji neopustí.
Jestliže se nechceme uchylovat k polárním souřadnicím, je možné první rovnici vynásobit x, druhou vynásobit y, obě rovnice sečíst a všimnout si, že na jednotkové kružnici platí $(x^2 + y^2)' = 0$.

(d) Ocitne-li se řešení na dělicí parabole, může z ní pokračovat pouze v kladném směru osy y.

2) (a) Po zakreslení zadaného vektorového pole (viz Obrázek 2) po chvíli vyloučíme vše kromě množiny $\{(0, s);\ s \in (0, 1)\}$, na níž si vystačíme s volbou $u \equiv 1$.

(b) Po grafickém ztvárnění (podstatné je správné nakreslení křivek $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$, viz Obrázek 3) vyvodíme jako oblast regulovatelnosti množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 0\}$.
Příklad regulačního postupu je prvně položit $u \equiv -2 \operatorname{sgn} y_0 + y_0/x_0$. Takto se nám podaří setkat se s trajektorií regulovaného řešení, které existuje v množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| \leq \pi/4 \wedge x < 0\}$ a při zpětném probíhání má v nekonečném čase limitu $(0, -\infty)$.

3) Na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ pozorujeme $y' < 0$ (viz Obrázek 4) a na jistém okolí počátku $y' \leq c < 0$. Odsud plyne neregulovatelnost $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}$. Množina $\{(0, y);\ y > 0\}$ naopak regulovatelná je bez ohledu na volbu u. Na ostatních zatím nezmíněných oblastech platí kvůli klesavosti y poblíž osy x odhad $|x'| \leq |x| \cdot y_0 \cdot \|u\|_\infty$. Odpovídající řešení jsou proto v x-souřadnici odražená od nuly funkcí $x_0 \exp(-t \cdot y_0 \cdot \|u\|_\infty)$.
Upustíme-li od požadavku $\|u\|_\infty < \infty$, stále nejsme schopni vylepšit situaci množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}$ ze stejných důvodů jako v předchozím případě. Totéž však neplatí pro $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0,\ y > 0\}$. Volbou u jako po částech konstantních „schodů do nebe" jsme schopni udržet $|x'| \geq c > 0$, kde c je konstanta dost velká na to, aby se řešení blížilo k ose y rychleji než k ose x (např. $c = 3\pi |x_0| y_0^{-1}/2$). Kvůli limity monotónní posloupnosti musí

takové řešení nutně skončit na ose y v čase seshora omezeném konstantou c. Zeslabením předpokladů jsme tak rozšířili oblast regulovatelnosti na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$.

4) Ideu rozvedeme ve třech krocích, jejichž poskládáním regulujeme řešení o libovolné počáteční podmínce. Pro lepší představu viz obrázky 5 a 6.

1. $(x_0, y_0) = (0, 2k\pi),\ k \in \mathbb{N}$.

   Položme $u \equiv -1$. Protože nyní

   $$\left(\frac{(x-1)^2}{2} + \cos y\right)' = 0,$$

   řešení o uvedené počáteční podmínce splňuje $x = 1 - \sqrt{3 - 2\cos y}$, což je 2π-periodická funkce v proměnné y, striktně záporná na $(2(k-1)\pi, 2k\pi)$. Odtud a z rovnice pro y' dostáváme, že příslušné řešení dorazí do bodu $(0, 2(k-1)\pi)$, a to nejpozději v čase $t = 2\pi$. Povšimněme si navíc

   $$C := \max_{y \in [2(k-1)\pi, 2k\pi]} |x(y)| = \sqrt{5} - 1.$$

   Analogický postup s $u \equiv 1$ zajistí přechod $(0, -2k\pi) \longrightarrow (0, -2(k-1)\pi)$.

2. $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in [2k\pi + 5\pi/4, 2k\pi + 7\pi/4],\ k \in \mathbb{Z} \wedge (x, y)$ leží napravo od trajektorie z předchozího bodu mezi $(0, 2(k+1)\pi)$a$(0, 2k\pi)\}$.

   Interval $[2k\pi + 5\pi/4, 2k\pi + 7\pi/4]$ značí pás, v němž $x' \leq -1/\sqrt{2}$. Vhodným přepínáním u v tomto intervalu s y-souřadnicí zůstaneme. Dosáhneme tak driftování v x-souřadnici až do styku s trajektorií z předchozího bodu, kdy zapojíme jemu příslušející hodnotu u. Délka doby trvání této fáze nepřekročí hodnotu $\sqrt{2}(|x_0| + C)$.
   Zcela analogicky by postup fungoval pro (x_0, y_0) takové, že $y_0 \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$, $k \in \mathbb{Z}$, a navíc (x_0, y_0) leží nalevo od trajektorie z předchozího bodu mezi $(0, 2(k+1)\pi)$ a $(0, 2k\pi)$.

3. (x_0, y_0) všude jinde.

   Dosazením vhodné konstanty za u dorazíme do „potrubí" z předchozího případu nebo překřížíme trajektorii z prvního případu. Kupříkladu volbou $u \equiv -x_0 + 2\pi$ se tak stane za čas $t < 3$.

5) Kalmanova matice má rank 2 a její sloupce generují nadrovinu $y + z = 0$.

6) (i) $a^2 + b^2 \neq 0$, (ii) $ab \neq 0$, (iii) $|a| \neq |b|$.

7) Převeďte na systém n rovnic; Kalmanova matice má na vedlejší diagonále jednotky a nad ní je nulová.

8) (a) $\mathcal{K}(A,B)$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále.

(b)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sloupce Kalmanovy matice generují $\mathrm{lin}\{(1,1,\dots,1)\}$.

9) (a)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Je-li n liché, pak: $\alpha \neq -\beta \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n$.
$\alpha = -\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,\dots,1)^{\perp}$.

Je-li n sudé, pak: $\alpha \neq \pm\beta \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n$.
$\alpha = -\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,\dots,1)^{\perp}$.
$\alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,-1,\dots,1,-1)^{\perp}$.

(b)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$\alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow$ sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují $\mathrm{lin}\{(\alpha,\alpha,\dots,\alpha)\}$.
$\alpha = -(n-1)\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce generují nadrovinu $(1,\dots,1)^{\perp}$.

10)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Kalmanova matice je regulární, o čemž se můžeme přesvědčit například výpočtem jejího determinantu. Po sestavení rekurentního vztahu a ověření nástřelu vyvozeného z $n = 1, 2, 3$ vyjde $\det(\mathcal{K}(A,B)) = n + 1$.

11)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! & n! \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & & 0 & (n-3)(n-2)(n-1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-2)(n-1) & (n-2)(n-1)n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (n-1)n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalmanova matice je regulární (opět lze snadno spočíst $\det(\mathcal{K}(A,B))$).

13) Jediná modifikace spočívá v předpokladu $f(\tilde{x}, 0) = 0$ a v užívání $\nabla_x f(\tilde{x}, 0), \nabla_u f(\tilde{x}, 0)$, kde $x' = f(x, u)$ – zobecnění $f(0, 0) = 0$, $\nabla_x f(0, 0)$, $\nabla_u f(0, 0)$. V dalším značme $A = \nabla_x f(\tilde{x}, 0), B = \nabla_u f(\tilde{x}, 0)$.

(a)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta\pi & 0 \\ \beta & 0 & -\alpha\beta\pi \\ 0 & 0 & \alpha\beta\pi \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = -1.$

(b)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^2 \\ \beta & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \beta = 3.$

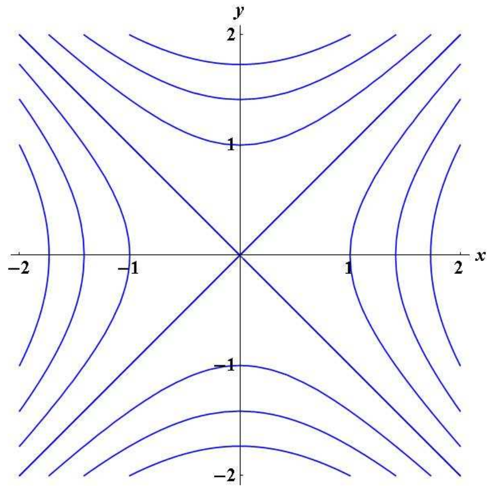
(c)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \cos x \\ 1 & \sin(2x) \end{pmatrix}$$

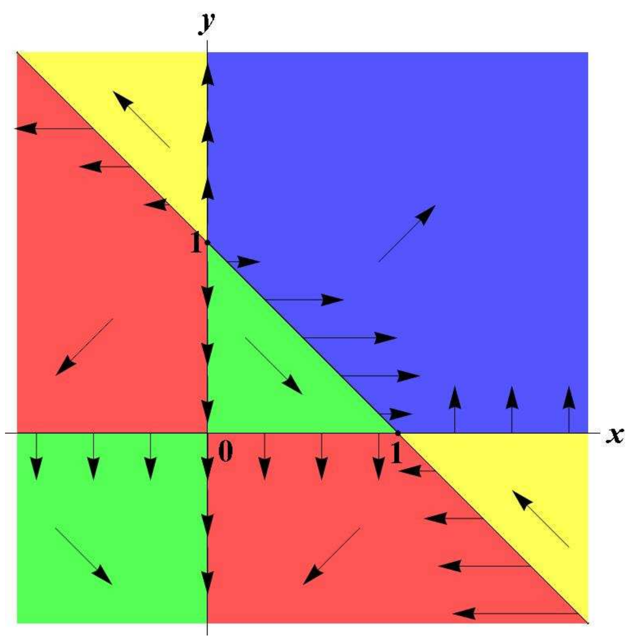
$\alpha = \beta = -1.$

(d)

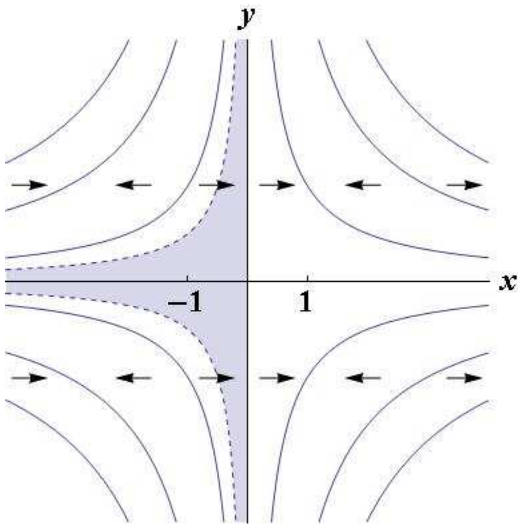
$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} x & -6 \\ y & 8e^4 \end{pmatrix}$$



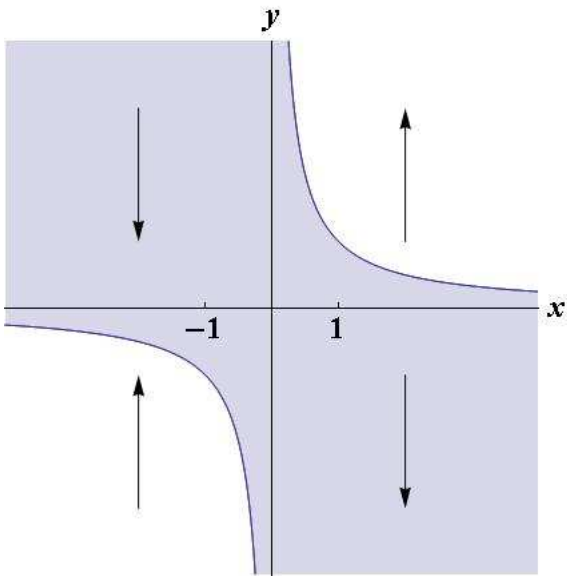
Obrázek 1: Úloha 1b – úrovňové množiny funkce $x^2 - y^2$ pro hodnoty $-3, -2, \ldots, 3$.



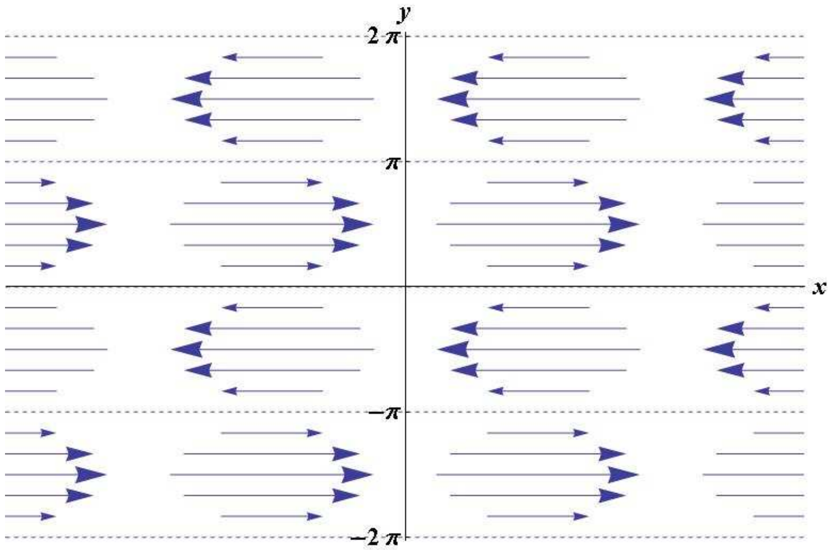
Obrázek 2: Fázový portrét cvičení 2a, v němž stejné barvy značí stejnou kombinaci znamének x' a y'.



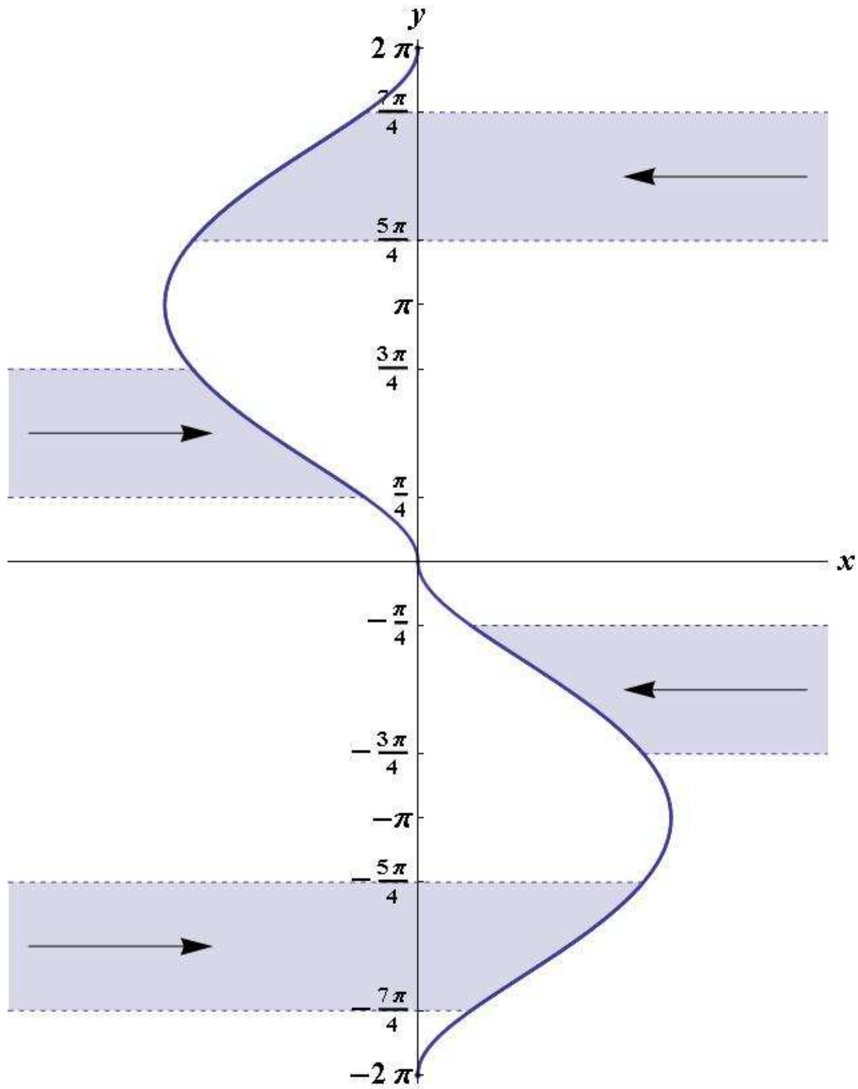
Obrázek 3: Úloha 2b – úrovňové množiny funkce xy pro hodnoty $-5\pi/2$, $-3\pi/2 \ldots 5\pi/2$ se znázorněným směrem x'. Zvýrazněná je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| \leq \pi/4 \wedge x < 0\}$.



Obrázek 4: Pomoc ke cvičení 3, kde zvýraznění značí $y' < 0$.



Obrázek 5: Ztvárnění x' ze cvičení 4.



Obrázek 6: Trajektorie regulovaných řešení začínajících v bodech $(0, -2\pi)$ a $(0, 2\pi)$ ze cvičení 4. Zvýrazněné oblasti značí počáteční podmínky spadající do kroku II.