## Optimální regulace

V této kapitole se budeme zabývat úlohou

$$x' = f(x, u), \tag{1}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

kde $x : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce, zatímco $u(\cdot)$ je regulace, kterou volíme s cílem optimalizovat chování systému v nějakém předem definovaném smyslu.

Třída „přípustných regulací“ má nejčastěji tvar

$$\mathcal{U} = \big\{u : (0, t) \to \mathbb{R}^m;\ u \text{ je měřitelná a } u(s) \in U \text{ pro s.v. } s\big\} \tag{3}$$

kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je konvexní množina. Obvykle platí $m < n$, tj. počet stupňů volnosti, kterými na systém působíme, je menší než celková dimenze systému.

Předpokládejme, že vlastnosti funkce $f$ zaručují, že pro každé $u \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno řešení úlohy (1–2) na intervalu $[0, t]$. Pokud toto řešení splňuje $x(t) = x_1$, budeme říkat, že regulace $u$ přivádí $x_0$ do $x_1$ za čas $t$, zapsáno symbolicky

$$x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1. \tag{4}$$

V teorie regulací se nejčastěji setkáváme s následujícími typy úloh:

1. Pro dané $x_1$ a $t > 0$ charakterizujte množinu bodů $x_1$ takových, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1$ pro nějakou přípustnou regulaci. (Otázka regulovatelnosti).

2. Pro dané $x_0$ a $x_1$ najděte přípustnou regulaci $u$ takovou, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1$, přičemž čas $t$ je nejmenší možný. (Časově optimální regulace).

3. Hledáme $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ takové, že hodnota funkcionálu

$$P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\, dt$$

je maximální. Hodnota $x(T)$ je dána pevně (obecněji, je prvkem předem dané množiny), zatímco čas $T$ může být libovolný. Alternativně lze uvažovat úlohu, kdy čas $T$ je dán pevně, zatímco hodnota $x(T)$ není předepsána.

**Regulovatelnost. Lineární úlohy.**

Jednoduché úlohy na regulovatelnost lze řešit pomocí elementárních úvah. Pro snazší vyjadřování zavedeme následující značení a pojmy.

**Definice.** Pro $t > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n;\ x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \text{ pro vhodné } u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\}.$$

To je množina počátečních podmínek, které lze za čas $t$ přivést pomocí přípustné regulace do počátku, neboli oblast regulovatelnosti za čas $t$.

Systém se nazve lokálně regulovatelný v čase $t$, pokud $\mathcal{R}(t)$ obsahuje okolí nuly.

**Příklad 1.** Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= y^3, \\ y' &= u, \qquad u \in [-1, 1], \end{aligned}$$

je lokálně regulovatelný v okolí počátku.

*Řešení.* Stačí uvážit, jak se chovají řešení pro hodnoty $u \equiv \pm 1$: řešení se pohybují po křivkách

$$\frac{y^4}{4} = \pm x + c.$$

Ty vyplní celou rovinu a snadno si rozmyslíme, že pro libovolné $t > 0$ obsahuje množina $\mathcal{R}(t)$ okolí nuly.

**Příklad 2.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je $C^1$ na okolí počátku. Potom systém

$$x' = f(x)u, \qquad u \in [-1, 1] \tag{5}$$

není lokálně regulovatelný pro žádný čas $t > 0$.

*Řešení.* Intuitivně vzato přítomnost skalární regulace $u$ pouze mění rychlost pohybu řešení po křivce, která je určena rovnicí

$$x' = f(x), \qquad x(0) = 0. \tag{6}$$

Přesněji: nechť $X(t)$ je řešení (6). Potom $x(t) := X(\int_T^t u(s)ds)$ je řešení původní rovnice (5). Díky jednoznačnosti je toto jediné řešení (splňující $x(T) = 0$). Tedy $\mathcal{R}(T)$ obsahuje jenom body, náležící trajektorii $X(t)$.

Budeme nyní uvažovat lineární případ, tj.

$$x' = Ax + Bu, \tag{7}$$
$$x(0) = x_0 \tag{8}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou konstantní matice. Za třídu přípustných regulací volíme

$$\mathcal{U} = L^\infty(0,t;\mathbb{R}^m).$$

Klíčovým objektem lineární teorie je Kalmanova matice regulovatelnosti

$$\mathcal{K}(A,B) = (B, AB, A^2B, \dots A^{n-1}B).$$

Jedná se o matici $n \times mn$. Hlavním výsledkem lineární teorie je následující věta.

**Věta 1.** *Pro každé $t > 0$ je $\mathcal{R}(t)$ vektorový prostor, generovaný sloupci matice $\mathcal{K}(A,B)$.*

**Důsledek.** *Úloha* (7) *je globálně regulovatelná – tj. $\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$ – pro každé $t > 0$, právě když Kalmanova matice $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost $n$.*

*Poznámka.* Všimněme si, že množina $\mathcal{R}(t)$ nezávisí na $t$. To souvisí s faktem, že přípustné regulace mohou nabývat libovolně velkých hodnot. Zřejmě tedy nemá smysl hovořit o časově optimálních regulacích.

**Příklad 3.** Uvažujeme systém

$$mx'' = u, \tag{9}$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0.$$

Cílem je volit $u(\cdot) \in L^\infty(0,t)$ takové, že $x(t) = x'(t) = 0$. Rovnice popisuje (jednorozměrný) problém „zaparkování“, kde $m$ je hmotnost automobilu, regulace $u$ je tah motoru a $x_0$, $y_0$ vyjadřují počáteční vzdálenost od počátku respektive rychlost.

Rovnici převedeme na soustavu prvního řádu pro $x$ a $y = x'$, tj.

$$x' = y,$$
$$y' = \frac{u}{m}.$$

Ve smyslu zápisu obecné soustavy tedy máme $n = 2$, $m = 1$ a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že systém je globálně regulovatelný; dokonce v libovolně malém čase (ovšem za dosti nerealistického předpokladu libovolně velké síly motoru.)

Není překvapující, že jedním z důsledků lineární věty je lokální výsledek pro nelineární problém.

**Věta 2.** *Nechť $f : V \times U \to \mathbb{R}^n$ je třídy $C^1$, nechť $V$ respektive $U$ jsou okolí nuly v $\mathbb{R}^n$ respektive $\mathbb{R}^m$, nechť přípustné regulace jsou tvaru* (3). *Nechť (klíčový předpoklad) matice $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost $n$, kde*

$$A = \nabla_x f(0,0), \qquad B = \nabla_u f(0,0).$$

*Potom rovnice* (1) *je lokálně regulovatelná pro každé $t > 0$.*

*Poznámka.* Klíčová podmínka na hodnost $\mathcal{K}(A,B)$ pochopitelně není *nutná*, jak ukazuje Příklad 1 výše.

**Příklad 4.** Uvažujeme pohyb kyvadla se třením, popsaný rovnicí

$$\begin{aligned} mx'' + q(x') + \sin x &= u, \\ x(0) = x_0,\ x'(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Funkce $q(\cdot)$ vyjadřuje tření a obvykle na ni proto klademe rozumné fyzikální požadavky. Pro účely příkladu nám postačí, že $q$ je třídy $C^1$ a $q(0) = 0$.

Převedeme rovnici opět na systém pro $x$ a $y$, tj.

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\frac{1}{m}\sin x - \frac{1}{m}q(y) + \frac{1}{m}u. \end{aligned}$$

Lehce se spočítá, že příslušné linearizace jsou dány maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{a}{m} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}, \end{pmatrix}$$

kde $a = q'(0)$. Potom

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{a}{m^2} \end{pmatrix},$$

což je zjevně regulární matice. Systém je tedy lokálně regulovatelný.