Obecné lineární problémy

Variace konstant

V kapitolách o soustavách lineárních rovnic a o lineárních rovnicích n-tého řádu jsme se naučili řešit rovnice (soustavy) s nulovou pravou stranou, resp. s pravou stranou ve speciálním tvaru. V této kapitole se naučíme řešit rovnice s obecnou pravou stranou.

Uvažujme lineární diferenciální rovnici řádu n, tj.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t)\,. \tag{1}$$

kde $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce, $a_i : (a,b) \to \mathbb{R}$ koeficienty rovnice, $a_0(t) \neq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ a $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je pravá strana.

Při značení

$$\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(n-k)}$$

můžeme rovnici (1) přepsat jako

$$\mathscr{L}[y] = f. \tag{2}$$

$\mathscr{L}$ je v tomto případě lineární zobrazení z $V := C^n((a,b),\mathbb{R})$ do $W := C((a,b),\mathbb{R})$.

Uvažujme nyní soustavu rovnic, kterou můžeme zapsat ve vektorovém tvaru (viz kapitola o soustavách lineárních rovnic)

$$Y' - A(t)Y = F(t), \tag{3}$$

kde $Y : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce, $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ matice koeficientů soustavy a $F : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ pravá strana. Při značení

$$\mathscr{L}[Y] = Y' - A(x)Y \tag{4}$$

můžeme rovnici (3) přepsat jako $\mathscr{L}[Y] = F$. $\mathscr{L}$ je v tomto případě lineární zobrazení z $V := C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ do $W := C((a,b),\mathbb{R}^n)$.

V následujícím můžeme tedy hovořit o obou úlohách najednou, f a y může být nahrazeno F a Y. Speciální případ $f = 0$ je tzv. *homogenní úloha*

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{5}$$

Připomeňme následující větu:

Věta 1 (Prostor řešení)**.** *1. Množina všech řešení homogenní rovnice* (5) *definovaných na intervalu (a,b) tvoří vektorový prostor dimenze n.*

2. *Je-li y_p řešení nehomogenní rovnice* (2) *na* (a,b)*, pak množina všech řešení rovnice* (2) *na* (a,b) *je* $\{y_p + y : y$ *je řešení* (5) *na* $(a,b)\}$.

První část věty říká, že množina řešení homogenní úlohy (5) tvoří lineární podprostor prostoru V (je to jádro zobrazení $\mathscr{L}$). *Fundamentálním systémem* rovnice (2) rozumíme libovolnou bázi tohoto podprostoru. Jinými slovy fundamentální systém je n-tice funkcí $\{y_1, \ldots, y_n\}$ takových, že obecné řešení homogenní úlohy (5) má tvar

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)\,, \tag{6}$$

kde c_i jsou reálné konstanty. Druhá část věty říká, že k nalezení obecného řešení (2) stačí určit fundamentální systém a jedno (pevně zvolené) řešení nehomogenní úlohy, tzv. *partikulární řešení.*

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém či partikulární řešení, neexistuje. Pokud však najdeme fundamentální systém, lze nalézt i partikulární řešení ve tvaru

$$y(t) = c_1(t) y_1(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t)\,, \tag{7}$$

přičemž určení $c_i(t)$ se redukuje na řešení soustavy n lineárních (algebraických) rovnic a následnou integraci. Tato metoda se nazývá *variace konstant.*

Věta 2 (Variace konstant pro rovnice n-tého řádu)**.** *Nechť* $\{y_1, \ldots, y_0)\}$ *je fundamentální systém rovnice* (1)*. Nechť* $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ *splňují pro* $\forall t \in (a,b)$ *soustavu (pro přehlednost proměnnou x vynecháváme)*

$$\begin{aligned}
c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots c_n' y_n &= 0 \\
c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots c_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots c_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots c_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f}{a_0}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Potom funkce (7) *je řešením úlohy* (1).

Věta 3 (Variace konstant pro soustavy rovnic)**.** *Nechť* $\{Y_1, \ldots, Y_n)\}$ *je fundamentální systém soustavy* (3)*. Nechť* $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ *splňují pro* $\forall x \in (a,b)$ *soustavu (pro přehlednost proměnnou x vynecháváme)*

$$c_1' Y_1 + c_2' Y_2 + \cdots + c_n' Y_n = F \tag{9}$$

Potom funkce $Y(t) = c_1(t) Y_1(t) + \cdots + c_n(t) Y_n(t)$ *je řešením úlohy* (3).

Poznámka. Zdůrazněme, že variace konstant funguje pro obecnou rovnici typu (1) a (3), třebaže se obvykle používá jen pro rovnice a soustavy s konstantními koeficienty, neboť tam umíme efektivně sestrojit fundamentální systém.

Poznámka. Na závěr úvodního textu poznamenejme, že rovnice n-tého řádu (1) je „ekvivalentní“ se soustavou rovnic (3), kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní v následujícím smyslu: Je-li y řešení (1) a definujeme-li $Y(t) := (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, pak Y je řešení (3). A naopak, jestliže Y je řešení (3), pak první souřadnice Y_1 je řešením rovnice (1). (Rozmyslete si podrobně)

Příklad 1. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y = 1/\cos t$.

Řešení. Fundamentální systém je $\{\cos t, \sin t\}$, tj. partikulární řešení hledáme ve tvaru $c_1(t)\cos x + c_2(t)\sin t$. Soustava (9) se zde redukuje na

$$\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= 0 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t &= \frac{1}{\cos t}\,. \end{aligned}$$

Vyřešíme (šikovný trik je násobit první rovnici $\cos t$, druhou $-\sin t$): $c_1' = -\sin t/\cos t$, $c_2' = 1$. Integrace dává

$$c_1(t) = \ln|\cos t|\,, \qquad c_2(t) = t\,.$$

Výsledek platí na intevalech nenulovosti $\cos t$, tj. $\big((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\big)$.

Příklad 2. Řešme úlohu $y''' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Řešení. Fundamentální systém: $\{1, e^t, e^{-x}\}$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $c_1(t) + c_2(t)e^t + c_3(t)e^{-x}$. Systém pro c_i' se redukuje na

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' e^t + c_3' e^{-t} &= 0 \\ c_2' e^t - c_3' e^{-t} &= 0 \\ c_2' e^t + c_3' e^{-t} &= \frac{e^t}{1+e^t}\,. \end{aligned}$$

Řešení je

$$c_1'(t) = -\frac{e^t}{1+e^t}\,, \qquad c_2'(t) = 1/2\,\left(1+e^t\right)^{-1}\,, \qquad c_3'(t) = 1/2\,\frac{e^{2\,t}}{1+e^t}\,.$$

Integrace dává

$$c_1(t) = -\ln(1+e^t)\,, \qquad c_2(t) = -1/2\,\ln(1+e^t) + 1/2\,\ln(e^t)\,,$$
$$c_3(t) = 1/2\,e^t - 1/2\,\ln(1+e^t)\,.$$

Příklad 3. Najděte řešení následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 6z + \frac{e^{2t}}{2+e^t}\,, \\ z' &= y - 2z\,. \end{aligned}$$

Řešení. Řešme nejprve homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 6 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2-\lambda \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix},$$

tedy $z(t) = ce^t + d$ a $y(t) = z' + 2z = 3ce^t + 2d$. Věta 3 nám dává

$$\begin{aligned} 3c'(t)e^t + 2d'(t) &= \frac{e^{2t}}{2+e^t} \\ c'(t)e^t + d'(t)e^{-t} &= 0, \end{aligned}$$

odtud $c(t) = \int \frac{e^t}{2+e^t}dt = \ln(2+e^t)$, $d(t) = -\int \frac{e^{2t}}{2+e^t}dt = -e^t + 2\ln(2+e^t)$. Výsledek tedy je:

$$\begin{aligned} y(t) &= 3ce^t + 2d + 3e^t\ln(2+e^t) - 2e^t + 4\ln(2+e^t) \\ z(t) &= ce^t + d + e^t\ln(2+e^t) - e^t + 2\ln(2+e^t). \end{aligned}$$

Úlohy na rovnice n-tého řádu

Variací konstant najděte partikulární řešení:

1. $y'' + y' = \frac{e^t}{1+e^{2\,t}}$

2. $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 t}$

3. $y'' - 2y' = 5\,(3-4\,t)\sqrt{t}$

4. $y'' + 3y' = \frac{3t-1}{t}$

5. $y'' - y' = -\frac{t+1}{t^2}$

6. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$

7. $y'' + 4y = 2\tan t$

8. $y'' + y' = \frac{1}{1+e^t}$

9. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}$

10. $y'' - y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

11. $y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^t}{\cos 3t}$

12. $y'' + y = -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$

13. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{t+1}$

14. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{1+t^2}$

15. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-t}}{\sin t}$

16. $y'' + 2y' + 5y = \frac{2e^{-t}}{\cos 2t}$

17. $y'' - 2y' = \frac{1}{t} - 2 - 2\ln t$

18. $y^{(4)} + y'' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$

19. Najděte partikulární řešení rovnice

$$y'' + \frac{1}{t(1+\ln t)}y' + \frac{1}{t^2(1+\ln t)}y = t(1+\ln t),$$

víte-li, že funkce $\ln t$ a $-1/t$ tvoří fundamentální systém.

Úlohy na soustavy rovnic

Najděte všechna řešení následujících soustav:

20.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - \ln t\,, \\ y' &= -4x - 2y + \ln t\,. \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t}\,, \\ y' &= -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t}\,. \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} z' &= -y + 3z + e^{2t}\ln t\,, \\ y' &= y + z + te^{2t}\,. \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} y' &= 5y - 6z + \frac{3e^{2t}}{\cos^3 3t}\,, \\ z' &= 3y - z\,. \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} y' &= 4y - 2z\,, \\ z' &= 8y - 4z + \sqrt{t}\,. \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} y' &= -7y + 2z\,, \\ z' &= -15y + 4z + \frac{e^{-2t}}{1+e^{2t}}\,. \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z - t\sqrt{t}\,, \\ y' &= -3x - 3y + 3z\,, \\ z' &= -2x - 2y + 2z + \sqrt{t}\,. \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} 2x' &= x - 3y + 4z\,, \\ 2y' &= x - 3y + 4z + \operatorname{tg} t\,, \\ z' &= -y + z\,. \end{aligned}$$

Řešení

1) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-t}$, $c_1(t) = \int \frac{e^t}{1+e^{2\,t}} dt = \arctan(e^t)$, $c_2(t) = \int -\frac{e^{2\,t}}{1+e^{2\,t}} dt = -1/2\,\ln(1+e^{2\,t})$.

2) $y_p(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t)$, $c_1(t) = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln|\tan(t/2)|$, $c_2(t) = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{\sin t}$.

3) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{2\,t}$, $c_1(t) = \int 5/2\sqrt{t}\,(-3+4\,t)\,dt = -5\,t^{3/2} + 4\,t^{5/2}$, $c_2(t) = \int -5/2\sqrt{t}\,(-3+4\,t)\,e^{-2\,t} dt = 5\,\frac{t^{3/2}}{(e^t)^2}$, $y_p(t) = 4\,t^{5/2}$.

4) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-3\,t}$, $c_1(t) = \int 1/3\,\frac{3\,t-1}{t^2} dt = 1/3\,t^{-1} + \ln(t)$, $c_2(t) = \int -1/3\,\frac{(3\,t-1)e^{3\,t}}{t^2} dt = -1/3\,\frac{e^{3\,t}}{t}$, $y_p(t) = \ln|t|$.

5) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^t$, $c_1(t) = \int \frac{t+1}{t^2} dx = -t^{-1} + \ln(t)$, $c_2(t) = \int -\frac{(t+1)e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-t}}{t}$, $y_p(t) = \ln|t|$.

6) $y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^t t$, $c_1(t) = \int -1 dt = -t$, $c_2(t) = \int t^{-1} dt = \ln|t|$, $y_p(t) = t\ln|t|e^t$.

7) $y_p(t) = c_1(t)\cos(2\,t) + c_2(t)\sin(2\,t)$, $c_1(t) = \int -2 + 2\,\cos^2 t dx = -t + \sin(t)\cos(t)$, $c_2(t) = \int \sin(t)(-1 + 2\,\cos^2(t))/\cos(t) dt = -\cos^2(t) + \ln|\cos(t)|$,

8) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-t}$ $c_1(t) = \int (1+e^t)^{-1}\, dt = -\ln(1+e^t) + t$, $c_2(t) = \int -\frac{e^t}{1+e^t} dt = -\ln(1+e^t)$.

9) $y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2\,t}$, $c_1(t) = \int -\frac{e^{-2\,t}}{e^{-x}+1} dt = e^{-t} + t - \ln(1+e^t)$, $c_2(t) = \int \frac{e^{-2\,t}}{1+e^t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t} + t - \ln(1+e^t)$.

10) $y_p(t) = c_1(t)\sinh(t) + c_2(t)\cosh(t)$, $c_1(t) = \int -1/2\,\left(-1+e^{-2\,t}\right)e^t dt = e^t/2 + e^{-t}/2$, $c_2(t) = \int -1/2\,\frac{\left(-1+e^{-2\,t}\right)^2 e^t}{1+e^{-2\,t}} dt = 2\arctan e^t - e^t/2 + e^{-t}/2$.

11) $y_p(t) = c_1(t)e^t\cos(3\,t) + c_2(t)e^t\sin(3\,t)$, $c_1(t) = \int -3\,\frac{\sin(3\,t)}{\cos(3\,t)} dt = \ln|\cos(3\,t)|$, $c_2(t) = \int 3 dx = 3\,t$.

12) $y_p(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t)$, $c_1(t) = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\, dx = \ln|\tan(t/2)| + \cos t$, $c_2(t) = \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t - 1} = \sin t + 1/\sin t$.

13) $y_p(t) = c_1(t)e^{-2\,t} + c_2(t)e^{-2\,t}t$, $c_1(t) = \int -\frac{t}{t+1} dt = -t + \ln|t+1|$, $c_2(t) = \int (t+1)^{-1}\, dt = \ln|t+1|$.

14) $y_p(t) = c_1(t)e^{2\,t} + c_2(t)e^{2\,t}t$, $c_1(t) = \int \frac{-2t}{t^2+1} dt = -\ln(t^2+1)$, $c_2(t) = \int 2\,\left(t^2+1\right)^{-1} dt = 2\,\arctan(t)$.

15) $y_p(t) = c_1(t)e^{-t}\cos(t) + c_2(t)e^{-t}\sin(t)$, $c_1(t) = \int -1 dt = -t$, $c_2(t) = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = \ln|\sin(t)|$.

16) $y_p(t) = c_1(t)e^{-t}\cos(2\,x) + c_2(t)e^{-t}\sin(2\,t)$, $c_1(t) = \int -\frac{\sin(2\,t)}{\cos(2\,t)} dt = 1/2\,\ln|\cos(2\,t)|$, $c_2(t) = \int 1 dt = t$.

17) $y_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{2\,t}$, $c_1(t) = \int (-1+2\,t+2\,\ln(t)t)/2t dt = -1/2\,\ln(t) + \ln(t)t$, $c_2(t) = -\int (-1+2\,t+2\,\ln(t)t)e^{2t}/2t dt = 1/2\,e^{-2\,t} + 1/2\,e^{-2\,t}\ln(t)$; $y_p(t) = \ln(t)t + 1/2$.

18) $y_p(t) = c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t + c_3(t) + c_4(t)\cdot t$, kde $c_1(t) = \int -\frac{\sin t}{\cos t} dt = \ln|\cos t|$, $c_2(t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t - t$, $c_3(t) = -\int t\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = -\frac{t}{\cos t} + \frac{1}{2}\ln|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}|$, $c_4(t) = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{\cos t}$; řešení je definováno na intervalech $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$.

19) $y_p = c_1(t)\ln t - c_2(t)\frac{1}{t}$, kde $c_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $c_2 = \frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{9}t^3$.

20) Po úpravách vyjde $x'' = -\frac{1}{t} - \ln t$, tj. $\lambda_{1,2} = 0$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody variace konstant) $t + \frac{3}{4}t^2 - t\ln t - \frac{t^2}{2}\ln t$, tedy $x(t) = a + t(b+1) + \frac{3}{4}t^2 - t\ln t - \frac{t^2}{2}\ln t$ a následně $y(t) = b - 2a - t(1+2b) - \frac{3}{2}t^2 + (t+t^2)\ln t$,

$t \in (0,\infty)$, a, $b \in \mathbb{R}$. Také je možno postupovat přímočařeji a z rovnice $x'' = -\frac{1}{t} - \ln t$ dostat integrováním rovnou výsledek, identický s výsledkem získaným pomocí metody variace konstant.

21) Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$, příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (1,1)$, tedy fundamentální systém je

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení (metodou variace konstant) je

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+8t \\ 3+4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}(e^t + te^{2t}) + \ln(1+e^t)\left[\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}\right].$$

22) Řešení čekáme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + d(t)\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t}(t+1) \end{pmatrix}.$$

Vyjde $c'(t) = t + t^2 - t\ln t$ a $d'(t) = \ln t - t$, odtud $c(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^t \ln t$ a $d(t) = t\ln t - t - \frac{1}{2}t^2$. Řešení je definováno na $(0,+\infty)$.

23) $y(t) = (c+d)e^{2t}\cos 3t + (c-d)e^{2t}\sin 3t + e^{2t}\operatorname{tg} 3t(\sin 3t + \cos 3t) + \frac{e^{2t}}{2\cos^2 3t}(\sin 3t - \cos 3t)$, $z(t) = ce^{2t}\sin 3t + de^{2t}\cos 3t - \frac{e^{2t}\cos 6t}{\cos 3t}$.

24) $y(t) = c + dt - \frac{8}{15}t^{5/2}$, $z(t) = 2c + d(t - 1/2) - \frac{16}{15}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2}$.

25) $y(t) = 2ce^{-2t} + de^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-2t}\ln(1+e^{-2t}) - 2e^{-t}\operatorname{arctg} e^t$, $z(t) = 5ce^{-2t} + 3de^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\ln(1+e^{-2t}) - 6e^{-t}\operatorname{arctg} e^t$.

26) $x(t) = -\frac{4}{35}t^{7/2} - \frac{2}{3}t^{5/2} + ct + d$, $y(t) = \frac{12}{35}t^{7/2} + \frac{4}{5}t^{5/2} - 3ct + e$, $z(t) = \frac{8}{35}t^{7/2} + \frac{8}{15}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} - 2ct + d - c + e$,

27) $x(t) = a(1/2 + 1/2\sin t + 1/2\cos t) + b(-1/2 + 1/2\cos t - 3/2\sin t) + c(2\sin t) + 1/2\ln(\cos t) - 1/2 + 1/2\sin t\ln((1+\sin t)/\cos t) + 3/2\cos t\ln((1+\sin t)/\cos t)$, $y(t) = a(-1/2 + 1/2\sin t + 1/2\cos t) + b(-1/2 + 1/2\cos t - 3/2\sin t) + c(2\sin t) - 1/2\ln(\cos t) - 1/2 + 1/2\sin t\ln((1+\sin t)/\cos t) + 3/2\cos t\ln((1+\sin t)/\cos t)$, $z(t) = a(-1/2 + 1/2\cos t) + b(1/2 - \sin t - 1/2\cos t) + c(\sin t + \cos t) - 1/2\ln(\cos t) + 1/2 - 1/2\sin t\ln((1+\sin t)/\cos t) + \cos t\ln((1+\sin t)/\cos t)$.

Variace konstant - integrální tvar

Někdy se variací konstant rozumí vyjádření partikulárního řešení jako konvoluce pravé strany a vhodného řešení homogenní úlohy. Získaný explicitní vzorec je též užitečný díky vyjádření počátečních podmínek.

Zformulujme tvrzení pro jednoduchost pouze pro rovnici s konstantními koeficienty:

$$\mathscr{K}[y] = f(t)\,, \tag{10}$$

kde $\mathscr{K}[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n$.

Věta 4. *Nechť $\omega(t)$ je řešení homogenní úlohy $\mathscr{K}[y] = 0$ s počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned} \omega(0) = \omega'(0) = \cdots = \omega^{(n-2)}(0) = 0\,, \\ \omega^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Potom

$$y_p(t) = \int_0^t \omega(t-s) f(s)\, ds \tag{12}$$

je řešení úlohy (10) *s nulovými počátečními podmínkami:*

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,. \tag{13}$$

Před důkazem se podívejme na dva ilustrativní příklady.

Příklad 4. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + a^2 y = f(t)$.

Řešení. Fundamentální systém zvolme $y_1(t) = \cos at$, $y_2(t) = \frac{1}{a}\sin at$. Všimněme si, že $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, tj. y_2 je hledané ω – řešení homogenní úlohy s počátečními podmínkami (11). Tudíž $y_p(t) = \frac{1}{a}\int_0^t \sin[a(t-s)] f(s)\, ds$ a obecné řešení má tvar

$$y(t) = c_1 \cos at + \frac{c_2}{a}\sin at + \int_0^t \frac{\sin[a(t-s)]}{a} f(s)\, ds\,.$$

Porovnáním počátečních podmínek navíc zjistíme, že $c_1 = y(0)$, $c_2 = y'(0)$.

Příklad 5. Nechť $x(t)$ je C^2 funkce a $x''(t) + x'(t) + x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. Potom $x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Řešení. Tuto úlohu (z řešitelského semináře) snadno vyřešíme pomocí Věty 1. Uvědomme si, že $x(t)$ je řešení úlohy

$$y'' + y' + y = f(t) \tag{14}$$

kde $f(t) := x''(t) + x'(t) + x(t)$. Charakteristický polynom má kořeny $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, tj. fundamentální systém tvoří funkce $\{y_1(t), y_2(t)\}$, kde $y_1(t) = \exp(-t/2)\cos\sqrt{3}t/2$, $y_2(t) = \exp(-t/2)\sin\sqrt{3}t/2$. Navíc $\omega(t) := 2y_2(t)/\sqrt{3}$

splňuje zjevně podmínky (11). Obecné řešení rovnice (14) (a tedy i $x(t)$) má tvar

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t y_2(t-s)f(s)\,ds\,.$$

Tvrdíme, že toto jde do 0 pro $t \to \infty$. První dva členy jsou jasné, zbývá odhadnout integrál, což se provede standardním roztržením na dva kusy. Protože $f(t) \to 0$ pro $t \to \infty$, zvolím $K > 0$ tak, že $|f(t)| \le \varepsilon$ pro $t > K$. S využitím odhadu $|y_2(t-s)| \le \exp(-(t-s)/2)$ máme pro $t > K$

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^t y_2(t-s)f(s)\,ds\Big| &\le \int_0^K e^{-(t-s)/2}f(s)\,ds + \varepsilon\int_K^t e^{-(t-s)/2}\,ds \\ &= e^{-t/2}\int_0^K e^{s/2}f(s)\,ds + 2\varepsilon\underbrace{\left(1 - e^{-(t-K)/2}\right)}_{\le 1}\,. \end{aligned}$$

To je pro t dost velké menší než 3ε, čímž je důkaz hotov.

K důkazu Věty 1 je potřeba následující pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě.

Lemma 5. *Nechť*

$$F(t) = \int_0^t \phi(t,s)\,ds$$

kde ϕ je C^1 funkce. Potom

$$F'(t) = \phi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\,ds\,.$$

Nyní můžeme provést důkaz Věty 4

Důkaz. Dosadíme jednoduše (12) do (10). Dle Lemmatu 5 je

$$y_p'(t) = \underbrace{\omega(0)}_{=0}f(t) + \int_0^t \omega'(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t \omega'(t-s)f(s)\,ds$$

s využitím (11). Opakovaním téhož argumentu dostaneme

$$y_p^{(k)}(t) = \int_0^t \omega^{(k)}(t-s)f(s)\,ds\,, \qquad k = 0,\dots,n-1 \tag{15}$$

a konečně

$$y_p^{(n)}(t) = \underbrace{\omega^{(n-1)}(0)}_{=1/a_0}f(t) + \int_0^t \omega^{(k)}(t-s)f(s)\,ds\,,$$

Je tedy

$$\mathscr{K}[y_p](t) = a_0 \frac{1}{a_0} f(t) + \int_0^t \underbrace{\mathscr{K}[\omega]}_{=0}(t-s) f(s)\, ds = f(t)$$

neboť ω je řešení homogenní úlohy. Splnění počátečních podmínek (13) plyne z (15). $\square$

Nyní zformulujme variaci konstant v integrálním tvaru pro obecnou soustavu rovnic

$$Y' = A(t)Y + F(t), \tag{16}$$

kde $A : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $F : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce. Připomeňme, že fundamentální matice soustavy je matice, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém soustavy.

Věta 6 (Variace konstant - integrální tvar)**.** *Buď $t_0 \in (a, b)$ a Φ fundamentální matice soustavy* (16)*. Pak řešení nehomogenní úlohy* (16) *s počáteční podmínkou $Y(t_0) = Y_0$ je*

$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}Y_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}F(s)ds.$$

Příklad 6. Uvažujme soustavu s konstantními koeficienty $Y' = AY + b(t)$, kde b je omezená na $[0, +\infty)$. Nechť vlastní čísla matice A jsou kladná. Pak existuje nejvýše jedno řešení, které je omezené na $[0, +\infty)$.

Řešení. Fundamentální maticí soustavy je exponenciála e^{tA} (viz kapitola o maticové exponenciále). Máme tedy

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Po přenásobení e^{-tA} dostáváme

$$e^{-tA}Y(t) = Y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds.$$

Je-li řešení Y omezené, musí platit

$$0 = Y_0 + \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-sA}b(s)ds = Y_0 + \int_0^{+\infty} e^{-sA}b(s)ds.$$

(integrál konverguje, protože vlastní čísla matice A jsou kladná, plyne např. z Jordanova tvaru). Takové Y_0 existuje nejvýše jedno.

Úlohy

28. Najděte všechna řešení rovnice $y'' + 2y' + y = f(t)$.

29. Uvažujme rovnici $y'' - 2y' + y = t^2 + 1$. O kolik se liší řešení s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ od řešení s počáteční podmínkou $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$ v čase $t = 5$?

30. Uvažujme počáteční úlohu $y'' - 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 1$. O kolik se liší řešení s pravou stranou $f(t) = 1+t$ od řešení s pravou stranou $\tilde{f}(t) = 1+\sin t$ (a stejnou počáteční podmínkou) v čase $t = 1$?

31. Ukažte, že je-li $x(0) \geq 0$, $x'(0) > -x(0)$ a $x''(t) \geq x(t)$ pro všechna $t > 0$, potom $x(t) \geq 0$ pro všechna $t > 0$.

32. Ukažte, že je-li $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ a $x''(t) \geq -x(t)$ pro všechna $t > 0$, potom $x(t) \geq \sin t$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Ukažte, že pro $x(0) > 0$ tvrzení neplatí.

33. Nechť funkce $e^{-t}(x'''(t) - x'(t)) \geq 1/100$ pro $t \in (100, +\infty)$. Potom $x(t) \to +\infty$. Dokažte nebo najděte protipříklad.

34. Nechť $x'''(t) - x'(t) \to +\infty$ pro $t \to +\infty$. Potom $x(t) \to +\infty$. Dokažte nebo najděte protipříklad.

35. Uvažujme děj popsaný rovnicí $y''-3y'+2y = t$ s naměřeným počátečním stavem $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$. S jakou přesností musíme znát y_0, abychom měli jistotu, že nepřesné řešení se od přesného neliší na intervalu $[0, 10]$ více než o 1?

36. Uvažujme kmitání popsané rovnicí $y''+y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, kde f je vnější síla, kterou umíme regulovat. Ukažte, že pokud vnější sílu změníme o málo, kmitání se změní o málo. Zformulujte přesně zadání problému.

37. Ukažte, že pro soustavu s konstantními koeficienty platí

$$y(t) = \Phi(t - t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - s) f(s) ds.$$

38. Ukažte, že Věta 4 je speciálním případem Věty 6.

39. Rozhodněte, zda v situaci z Příkladu existuje právě jedno omezené řešení.

40. Uvažujme nelineární soustavu rovnic $Y' = AY + F(Y)$, kde F je L-lipschizovská. Pro každou počáteční podmínku $Y(t_0) = Y_0$
(a) existuje řešení definované aspoň na $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$.
(b) existuje řešení definované na celém $\mathbb{R}$.

41. Uvažujme soustavu $Y' = AY + b(t)$, kde b je T-periodická. Ukažte, že
(a) příslušná homogenní rovnice má netriviální S-periodické řešení, právě když $1 \in \sigma(e^{SA})$ (1 je vlastním číslem matice e^{SA}).

(b) pokud $1 \notin \sigma(e^{TA})$, pak existují $d \in \mathbb{R}^n$, T-periodické funkce $F : \mathbb{R} \to R^{n\times n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a matice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že řešení nehomogenní rovnice s počáteční podmínkou $Y(0) = y_0$ je $Y(t) = F(t)C^n(y_0 + d) - F(t)d + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(c) pokud $1 \notin \sigma(e^{TA})$, pak existuje právě jedno T-periodické řešení nehomogenní rovnice.

Řešení

28) Fundamentální systém je e^t, te^t. Hledáme řešení $y(t) = ae^t + bte^t$ splňující $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. To je řešení te^t. Řešení nehomogenní rovnice tedy jsou

$$y(t) = ce^t + dte^t + \int_0^t (t-s)e^{t-s} f(s)ds.$$

29) $y(t) - \tilde{y}(t) = (e^t - te^t) - (e^t/2 - te^t/2)$, tj. pro $t = 1$ máme $|\frac{1}{2}e^5 - \frac{5}{2}e^5| = 2e^5$.

30) $y(t) - \tilde{y}(t) = \int_0^t (t-s)e^{t-s}(s - \sin s)ds$, tj. pro $t = 1$ máme $3 - e - \frac{1}{2}\cos 1$.

31) Buď $f(t) := x''(t) - x(t) \geq 0$. Pak $x(t) = ce^t + de^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} - e^{s-t})f(s)ds \geq 0$ a z počátečních podmínek $c > 0$ a $c + d \geq 0$. Odtud už snadno plyne tvrzení.

32) Buď $f(t) := x''(t) + x(t) \geq 0$. Pak $x(t) = \sin t + x(0)\cos t + \int_0^t \sin(t - s)f(s)ds \geq 0$, pokud $x(0) = 0$. Pokud $x(0) > 0$ a $f(t) \equiv 0$, pak $x(t) < 0$ na $(\pi/2, \pi)$.

33) Označme $f(t) := e^{-t}(x'''(t) - x'(t))$, pak

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} + e^{s-t} - 2)e^s f(s)ds \\ &= c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + e^t \int_0^t \frac{1}{2}(1 + e^{2s-2t} - e^{s-t})f(s)ds \end{aligned}$$

Funkce $1 + e^{2s-2t} - e^{s-t}$ nabývá minima $1 + 1/4 - 1/2 = 3/4$, máme

$$x(t) \geq e^t(c_2 + \frac{3}{8}\int_0^t f(s)ds - \varepsilon)$$

a protože f je zdola omezená, také závorka v posledním výrazu se blíží k $+\infty$.

34) Buď $f(t) := x'''(t) - x'(t)$, pak

$$x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} + e^{s-t} - 2)f(s)ds$$

Pokud např. $f(t) = t$, máme

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + e^t + e^{-t} - 2 - t^2 \to -\infty,$$

pokud $c_2 \leq -1$.

35) Řešení rovnice bude $y(t) = (2e^t - e^{2t})y_0 + \int_0^t (e^{2t-2s} - e^{t-s}) s ds$, tj. $y(t) - \tilde{y}(t) = (2e^t - e^{2t})(y_0 - \tilde{y}_0) \leq 1$. Z tvaru funkce $|2e^t - e^{2t}|$ plyne, že nabývá maxima v bodě 10, tj. $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq (e^{20} - 2e^{10})^{-1}$.

36) Ihned z integrálního tvaru variace konstant

$$|y_1 - y_2| \leq \int_0^t |\sin(t-s)|\, |f_1(s) - f_2(s)| ds.$$

37) Homogenní soustava s konstantními koeficienty je autonomní, tedy je-li $t \mapsto \Phi(t)C$ řešení, pak i $t \mapsto \Phi(s+t)C$ je řešení. Toto řešení má v čase 0 hodnotu $\Phi(s)C$, tj. musí platit $\Phi(s+t)C = \Phi(t)\Phi(s)C$ pro všechna C. Odtud $\Phi(t)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t-s)$ pro $s \leq t$.

38) Vydělme nejprve rovnici (10) číslem a_0. Je třeba ukázat, že fundamentální matice Φ pro rovnici n-tého řádu má na pozici $(\Phi)_{1n}$ funkci ω z Věty 4, je-li Φ ta fundamentální matice, která je pro $t = 0$ rovna identitě. Taková fundamentální matice musí mít v posledním sloupci právě řešení, jehož hodnoty v nule odpovídají hodnotám funkce ω.

39) Zbývá ukázat, že funkce $f : t \mapsto e^{tA}\left(Y_0 - \int_0^t e^{-sA} b(s) ds\right)$ pro Y_0 definované v Příkladu je omezená. Platí

$$f(t) = \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} b(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{-sA} b(t+s) ds,$$

tedy $|f(t)| \leq \sup b \cdot \int_0^{+\infty} e^{-sA} ds < C < +\infty$.

40) (a) Definujme x_{n+1} jako řešení rovnice $Y = AY + F(x_n)$ s danou počáteční podmínkou. Z variace konstant plyne

$$e^{tA} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \int_{t_0}^t e^{sA} L \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| ds.$$

Na intervalu menším než $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$ je zobrazení $\Phi : e^{tA} x_n \mapsto e^{tA} x_{n+1}$ kontrakce v suprémové normě. Řešení tedy existuje na každém podintervalu, a tudíž také na $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$.
(b) Ukažte, že zobrazení $\Phi : e^{t(A-L)} x_n \mapsto e^{t(A-L)} x_{n+1}$ je pro dost velké (resp. malé) $L \in \mathbb{R}$ kontrakce v suprémové normě na $(t_0, +\infty)$ (resp. $(-\infty, t_0)$).

41) (a) máme $1 \in \sigma(e^{SA})$, právě když $2i\pi/S \in \sigma(A)$, právě když $\sin(2\pi/S)$ je řešením homogenní rovnice.
(b) Z variace konstant máme $Y(t) = e^{nTA}e^{\sigma A}y_0 + \int_0^{nT+\sigma} e^{sA}b(nT+\sigma-s)$, kde $t = nT+\sigma$, $\sigma \in [0,T)$. Rozdělíme-li integrál na intervaly $(0,\sigma)$, $(\sigma, T+\sigma)$, $\dots$, $((n-1)T+\sigma, nT+\sigma)$, dostaneme

$$Y(t) = e^{\sigma A}C^n y_0 + \int_0^\sigma e^{sA}b(\sigma-s)ds + e^{\sigma A}\sum_{k=1}^n C^{k-1}\int_0^T e^{sA}b(-s)ds,$$

kde $C = e^{TA}$. Pokud $1 \notin \sigma(C)$, platí $\sum_1^n C^{k-1} = (C^n - I)(C-I)^{-1}$, tedy dostáváme požadovaný tvar, kde $F(t) = e^{tA}$ a $f(t) = \int_0^\sigma e^{sA}b(\sigma-s)ds$ na $[0,T)$ a T-periodicky rozšířená na $\mathbb{R}$ a $d = (C-I)^{-1}\int_0^T e^{sA}b(-s)ds$.
(c) Protože $F(t)C^n = e^{tA}$, plyne z (a) a (b), že jediné T-periodické řešení získáme pro $y_0 = -d$.

Metoda snižování řádu

Uvažujme homogenní lineární rovnici 2. řádu s nekonstantními koeficienty

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

u které známe nebo umíme uhodnout jedno řešení $y_1(x)$. Potom umíme dopočítat druhé řešení fundamentálního systému následujícím způsobem:

Zvolme $y(x) = y_1(x)z(x)$ a počítejme $y' = y_1'z + y_1z'$ a $y'' = y_1''z + 2y_1'y' + y_1z''$. Odtud

$$\begin{aligned}
&a_2(x)(y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'') + a_1(x)(y_1'z + y_1z') + a_0(x)y_1z \\
&\quad = z(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + a_2(x)y_1z'' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')z' \\
&\quad = a_2(x)y_1z'' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')z',
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože y_1 je řešení homogenní rovnice. Položíme-li nyní $v = z'$, dostáváme pro v rovnici

$$a_2(x)y_1v' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')v = 0,$$

což je lineární rovnice 1. řádu, kterou umíme řešit.

Příklad 7. Najděte všechna řešení rovnice

$$y'' + \frac{x-3}{x}y' + \frac{x-3}{x^2}y = 0.$$

Řešení. Uhádneme řešení $y_1(x) = x$. A zavedeme substituci $y(x) = xz(x)$. Dostaneme rovnici $xv' = (1-x)v$, tj. $\ln|v| = \ln x - x + c$, $v = \pm e^c x e^{-x}$, $z = ke^{-x}(-x-1)$. Druhá funkce fundamentálního systému je $e^{-x}(-x^2-x)$ a všechna řešení rovnice jsou $y(x) = cx + de^{-x}(-x^2-x)$.

Úlohy

42. Najděte všechna řešení rovnice

$$y'' - \frac{4-2x^2}{4-x^2}y' + \frac{x^2}{4-x^2}y = (x-2)e^x,$$

víte-li, že funkce e^x řeší rovnici s nulovou pravou stranou.

43. Najděte všechna řešení rovnice

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x(x+1)^2}y = x + 2 + \frac{1}{x},$$

víte-li, že funkce $\frac{1}{x+1}$ řeší rovnici s nulovou pravou stranou.

44. Najděte všechna řešení rovnice

$$x^2y'' + x(x^2+3)y' - (x^2+3)y = 0.$$

45. Najděte všechna řešení rovnice $x^3y'' - x^2y' + (x^2-x^3)y = 0$, která jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

46. Najděte všechna řešení rovnice

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 0.$$

47. Najděte řešení rovnice

$$(1+x^2)y'' - y' - x^2y = 0$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Řešení

42) Metodou snižování řádu hledáme druhé řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x) = z(x)e^x$, po dosazení $z''(x) + 4z'(x)/(4-x^2) = 0$ dává řešení $a(x - 4\ln(x+2)) + b$. Druhá funkce fundamentálního systému je tedy $(x - 4\ln(x+2))e^x$. Variací konstant dostaneme $y_p = c(x)e^x + d(x)(x - 4\ln(x+2))e^x$, kde $c(x) = \int -(x+2)(x-4\ln(x+2))dx = -1/3x^3 - 2x^2 - 4x - 8/3 + 2(x+2)^2\ln(x+2)$ a $d(x) = \int x + 2dx = 1/2x^2 + 2x$.

43) Metodou snižování řádu hledáme druhé řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x) = z(x)/(x+1)$, po dosazení $x(x+1)z''(x) - 2z'(x) = 0$ dává řešení $a(x - 1/x + 2\ln x) + b$. Druhá funkce fundamentálního systému je $(x - 1/x + 2\ln x)/(x+1)$. Variací konstant dostaneme $y_p = c(x)/(x+1) + d(x)(x - 1/x + 2\ln x)/(x+1)$, kde $c(x) = \int -x(x+1)(x - 1/x + 2\ln x)dx = -1/4x^4 + x^2 - 2/3x^3 \ln x - 1/9x^3 + x - x^2 \ln x$ a $d(x) = \int x(x+1)dx = 1/2x^2 + 1/3x^3$.

44) Uhodneme řešení $y_1 = x$. Dopočítáme druhé řešení: $x^3 v' - (x^4 + x^2)v = 0$, $v = xe^{x^2/2}$, $z = e^{x^2/2}$, $y_2(x) = xe^{x^2/2}$.

45) Uhodneme řešení $y_1 = e^x$. Dopočítáme druhé řešení $y_2(x) = e^x \int_1^x e^{-2t}/t dt$ na $(0, +\infty)$. Protože integrál nekonverguje pro $x \to 0$, toto řešení nelze prodloužit do nuly, tj. všechna řešení definovaná na $\mathbb{R}$ jsou $y(x) = c \cdot e^x$.

46) Uhodneme řešení $y_1 = x$. Dopočítáme druhé řešení: $(x^2+1)v' + (x^2 + 2(1+x^2))v = 0$, $v = x^{-2}\sqrt{1+x^2}^{-1}$, $z = -\sqrt{1+x^2}/x$, $y_2(x) = -\sqrt{1+x^2}$.

47) Uhodneme řešení $y_1 = e^x$. Dopočítáme druhé řešení: $(x+1)v' + (-xe^x + 2(1+x)e^x)v = 0$, $v = e^{-2x}e^{\operatorname{arctg} x}$, $z = \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt$, $y_2(x) = e^x \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt$. Počáteční podmínku splňuje řešení

$$y(x) = e^x - e^x \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt.$$

Eulerovy rovnice

Rovnice

$$\mathscr{E}[y] = f(x)\,, \qquad \mathscr{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^{(n-k)}\,, \tag{17}$$

$b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.

Jde o speciální případ lineární rovnice n-tého řádu s nekonstantími koeficienty, kde koeficient u n-té derivace je roven $b_k x^{n-k}$. Klíčový předpoklad o nenulovosti koeficientu u nejvyšší derivace je splněn v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde také rovnici uvažujeme. Eulerovy rovnice jsou jednou z mála tříd rovnic, pro které umíme najít fundamentální systém.

První způsob řešení

Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = |x|^\lambda$. Dostaneme $\mathscr{E}[y] = |x|^\lambda p(\lambda)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-(n-k)+1)b_k \tag{18}$$

nazýváme charakteristický polynom rovnice (17). Názorně: y odpovídá 1, xy' odpovídá λ, $x^2y^{(2)}$ dá $\lambda(\lambda-1)$, $x^3y^{(3)}$ dá $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, atd.

Odtud: je-li λ_0 kořen $p(\lambda)$ násobnosti k, pak funkce

$$|x|^{\lambda_0},\ |x|^{\lambda_0}\ln|x|,\ \dots, |x|^{\lambda_0}\ln^{k-1}|x| \tag{19}$$

řeší homogenní úlohu $\mathscr{E}[y]=0$. Vezmeme-li funkce typu (19) pro všechny kořeny charakteristického polynomu, získáme fundamentální systém.

V případě komplexně sdružených kořenů $\lambda = a \pm ib$ nahrazujeme dvojici funkce $|x|^{a\pm ib}$ reálnou a imaginární částí, což je

$$|x|^a \sin(b\ln|x|)\,,\quad |x|^a\cos(b\ln|x|)\,.$$

Příklad 8. Najděte všechna řešení rovnice

$$x^3y^{(3)} - 2xy' + 4y = 0.$$

Řešení. Charakteristický polynom je

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda + 4 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2\,.$$

Fundamentální systém tvoří funkce $|x|^{-1}$, $|x|^2$ a $|x|^2\ln|x|$. S výjimkou argumentu logaritmu můžeme psát x místo $|x|$.

Druhý způsob řešení — substituce

Substitucí $z(t) := y(e^t) = y(x)$ převedeme Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty. Tento způsob je sice zdlouhavější, ale vysvětluje důležité souvislosti (například to, proč v prvním způsobu hledáme řešení ve tvaru $|x|^\lambda$).

Příklad 9. Řešte rovnici

$$x^2y^{(2)} + y = 0.$$

Řešení. Substituce $z(t) := y(e^t) = y(x)$ na intervalu $x \in (0,+\infty)$ nám dává $z'(t) = y'(e^t)e^t = xy'(x)$, $z''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + z'(t) = x^2y''(x) + z'(t)$. Dosazením do rovnice získáváme

$$z'' - z' + z = 0$$

Charakteristický polynom je tedy

$$\lambda(\lambda-1) + 1 = \lambda^2 - \lambda + 1\,.$$

Kořeny jsou $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, reálný fundamentální systém tvoří funkce $e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$, $e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$, tj. po zpětném dosazení

$$\sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\,,\ \sqrt{x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\,.$$

Na intervalu $(-\infty,0)$ získáme řešení substitucí $z(t) = y(-e^t)$. Celkem tedy máme fundamentální systém

$$\sqrt{|x|}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)\,,\ \sqrt{|x|}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)$$

na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$.

Rovnici s nenulovou pravou stranou můžeme řešit variací konstant. V druhém postupu si můžeme vybrat, zda použijeme variaci konstant v rovnici s neznámou z nebo až po zpětném dosazení pro rovnici s neznámou y. Jak je vidět z druhého postupu, nehomogenní rovnici můžeme také řešit pomocí věty o speciální pravé straně, pokud má pravá strana po zasubstituování tvar $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$. To odpovídá tvaru

$$t^{\alpha}(P(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q(\ln x)\sin(\beta\ln x))$$

před provedením substituce. Na základě věty o speciálním tvaru pravé strany (viz kapitola o lineárních rovnicích s konstantními koeficienty) můžeme tedy vyslovit následující větu, kterou pak můžeme aplikovat, aniž bychom prováděli substituci:

Věta 7 (Speciální pravá strana pro Eulerovy rovnice.)**.** *Nechť*

$$f(x) = |x|^{\alpha}\big[q_1(\ln|x|)\cos(\beta\ln|x|) + q_2(\ln|x|)\sin(\beta\ln|x|)\big]\,, \tag{20}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu (18) *Eulerovy rovnice* (17)*.*

Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = (\ln|x|)^k|x|^{\alpha}\big[r_1(\ln|x|)\cos(\beta\ln|x|) + r_2(\ln|x|)\sin(\beta\ln|x|)\big]$$

je řešení (17) *na intervalu* $(0,+\infty)$*.*

Příklad 10. Najděte všechna řešení rovnice

$$x^3y^{(3)} - 2xy' + 4y = x^2.$$

Řešení. Z řešení Příkladu 1 víme, že fundamentální systém této rovnice je $|x|^{-1}$, x^2 a $x^2 \ln|x|$. Charakteristický polynom má jednoduchý kořen -1 a dvojnásobný kořen 2. Pravá strana je ve speciálním tvaru, kde $\alpha + i\beta = 2$, tj. $k = 2$. Polynomy q_1, q_2 z Věty 7 jsou stupně 0. Existuje tedy partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = c \cdot (\ln|x|)^2 x^2$. Dosazením do rovnice získáme $c = 1/6$, tedy všechna řešení rovnice jsou

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 \ln^2|x| + \frac{a}{|x|} + bx^2 + cx^2 \ln|x|, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$x \in (0, +\infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$.

Úlohy

48. Dořešte Příklad 9 podrobně na intervalu $(-\infty, 0)$.

49. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

50. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$

51. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$

52. $9x^2y'' + 9xy' - y = 0$

53. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$

54. $x^2y'' + xy' = 0$

55. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

56. $x^3y''' + 9x^2y'' + 18xy' + 6y = 0$

57. $x^3y''' + 3x^2y'' = 0$

58. $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = 0$

59. $x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = 0$

60. $x^3y''' + 4x^2y'' - xy' - 3y = 0$

61. $x^3y''' - 7x^2y'' - 9xy' = 0$

62. $x^3y''' + 5x^2y'' + 5xy' + y = 0$

63. $x^3y''' + 7x^2y'' + 13xy' = 0$

64. $x^3y''' - 4x^2y'' + 19xy' - 39y = 0$

65. $x^2y'' + (3i + 1)xy' - 2y = 0$

66. $x^2y'' + (1 - 20i)xy' - 100y = 0$

67. $x^2y'' + 2\sqrt{2}xy' + 3y = 0$

68. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 17 \ln x \cos(\ln x)$

69. $2x^2y'' - 3xy' + 3y = x\sqrt{x}$

70. $x^2y'' + xy' + y = -2 \sin(\ln x)$

71. $x^2y'' - 6y = -16x^2 \ln x$

72. Najděte partikulární řešení rovnice $x^2y'' - xy' + y = \frac{x}{1+\ln x}$.

73. Najděte partikulární řešení rovnice $x^3y''' + xy' - y = \frac{x}{\ln^2 x+1}$.

74. Rozmyslete si podrobně, že první postup řešení skutečně dává fundamentální systém řešení.

75. Dokažte větu 7.

76. Věta 7 platí jistě i na intervalu $(-\infty, 0)$. Jsou ale polynomy r_1, r_2 na $(-\infty, 0)$ tytéž jako na $(0, +\infty)$ (pokud pravá strana je dána rovností (20) pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)? Svou odpověď dokažte.

Řešení

48) ...

49) $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2$, $\{x, x^2\}$.

50) $\lambda^2 - 6\,\lambda + 8$, $\{x^2, x^4\}$.

51) $2\,\lambda^2 + \lambda - 1$, $\{1/x, \sqrt{|x|}\}$.

52) $9\,\lambda^2 - 1$, $\{\sqrt[3]{x}, 1/\sqrt[3]{x}\}$.

53) $\lambda^2 + 6\,\lambda + 9$, $\{x^{-3}, x^{-3}\ln|x|\}$.

54) λ^2, $\{1, \ln|x|\}$.

55) $\lambda^2 - 2\,\lambda + 2$, $\{x\sin(\ln|x|), x\cos(\ln|x|)\}$.

56) $\lambda^3 + 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda + 6$, $\{x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}\}$.

57) $\lambda^3 - \lambda$, $\{x, 1/x, 1\}$.

58) $\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 12\,\lambda - 8$, $\{x^2, x^2\ln x, x^2\ln^2 x\}$.

59) $\lambda^3 + \lambda$, $\{1, \sin(\ln|x|), \cos(\ln|x|)\}$.

60) $\lambda^3 - 3\,\lambda + \lambda^2 - 3$, $\{1/x, |x|^{\sqrt{3}}, |x|^{-\sqrt{3}}\}$.

61) $\lambda^3 - 10\,\lambda^2$, $\{1, \ln|x|, x^{10}\}$.

62) $\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + 2\,\lambda + 1$, $\{1/x, |x|^{-1/2}\sin(\sqrt{3}/2 \cdot \ln|x|), |x|^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2 \cdot \ln|x|)\}$.

63) $\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 8\,\lambda$, $\{1, \frac{\sin(\ln x^2)}{x^2}, \frac{\cos(\ln x^2)}{x^2}\}$.

64) $\lambda^3 - 7\,\lambda^2 + 25\,\lambda - 39$, $\{x^3, x^2\sin(\ln x^3), x^2\cos(\ln x^3)\}$.

65) $\lambda^2 + 3i\lambda - 2$, $\{|x|^{-i}, |x|^{-2i}\}$.

66) $\lambda^2 - 20i\lambda - 100$, $\{|x|^{10i}, |x|^{10i}\ln|x|\}$.

67) $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 3 = 0$, $\{|x|^{-\sqrt{2}}\sin(\ln x), |x|^{-\sqrt{2}}\cos(\ln x)\}$.

68) Charakteristický polynom $\lambda^2+\lambda-12$ má kořeny 3 a -4, fundamentální systém je x^3 a x^{-4}. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = (a\ln x +$

$b)\cos(\ln x) + (c\ln x + d)\sin(\ln x)$. Dostáváme $c = 1/10$, $a = -13/10$, $b = -29/425$ a $d = 181/850$. Všechna řešení jsou

$$\left(\frac{1}{10}\ln x + \frac{181}{850}\right)\sin(\ln x) - \left(\frac{13}{10}\ln x + \frac{29}{425}\right)\cos(\ln x) + cx^3 + \frac{d}{x^4},$$

$x \in (0, +\infty)$.

69) Charakteristický polynom $2\lambda^2 - 5\lambda + 3$ má kořeny 1 a 3/2, fundamentální systém je x a $x\sqrt{x}$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = ax^{3/2}\ln x$ ($\alpha = 3/2$, $\beta = 0$, $k = 1$, $m = 0$). Dostáváme $a = 1$, všechna řešení tedy jsou

$$x\sqrt{x}\ln x + cx + dx\sqrt{x},$$

$x \in (0, +\infty)$.

70) Charakteristický polynom $\lambda^2 + 1$ má kořeny $\pm i$, fundamentální systém je $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = \ln x(a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x))$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$, $k = 1$, $m = 0$). Dostáváme $a = 1$, $b = 0$, všechna řešení tedy jsou

$$\ln x(a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)) + c\sin(\ln x) + d\cos(\ln x),$$

$x \in (0, +\infty)$.

71) Charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 6$ má kořeny 3 a -2, fundamentální systém je x^3, $1/x^2$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = (a\ln x + b)x^2$ ($\alpha = 2$, $\beta = 0$, $k = 0$, $m = 1$). Dostáváme $a = 4$, $b = 3$, všechna řešení tedy jsou

$$(4\ln x + 3)x^2 + cx^{-2} + dx^3,$$

$x \in (0, +\infty)$.

72) Eulerova rovnice, substituujeme $x = e^t$, dostáváme

$$z'' - 2z' + z = \frac{e^t}{t+1}.$$

Očekáváme řešení ve tvaru $c(t)e^t + d(t)te^t$, variací konstant získáváme $c(t) = -\int \frac{t}{t+1}dt = -t + \ln|t+1|$, $d(t) = \int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t+1|$. Tedy

$$y(x) = x(\ln|1 + \ln x| - \ln x) + x\ln x\ln|1 + \ln x| + cx + dx\ln x.$$

73) Eulerova rovnice, substituujeme $x = e^t$, dostáváme

$$z''' - 3z'' + 3z' - z = \frac{e^t}{t^2+1}.$$

Očekáváme řešení ve tvaru $c(t)e^t+d(t)te^t+f(t)t^2e^t$, variací konstant získáváme $f(t) = \int \frac{1}{2}\ \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$, $d(t) = \int -\frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+1|$, $c(t) = \int \frac{1}{2}\ \frac{t^2}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}(t-\operatorname{arctg} t)$. Tedy

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x(\ln x - \operatorname{arctg}\ln x) - x\ln x\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x+1| + x\ln^2 x\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\ln x.$$

74) Je třeba ukázat, že všechny funkce $|x|^\lambda \ln^r|x|$ (pro příslušná r a λ) řeší rovnici a že tyto funkce jsou lineárně nezávislé. Důkaz je obdobný důkazu věty o fundamentálním systému pro rovnice s konstantními koeficienty. ...

75) Proveďte substituci $z(t) = y(e^t)$ a použijte větu o speciální pravé straně pro rovnice s konstantními koeficienty.

76) Máme-li řešení y_1 na $(0,+\infty)$ a definujeme $y_2(x) := y_1(-x)$ pro $x<0$, dostáváme

$$\mathscr{E}[y_2](x) = \mathscr{E}[y_1(-x)] = f(-x) = f(x),$$

tedy polynomy r_1, r_2 jsou stejné na kladné i záporné poloose.