Řešení

48) ...

49) $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\{x, x^2\}$.

50) $\lambda^2 - 6\lambda + 8$, $\{x^2, x^4\}$.

51) $2\lambda^2 + \lambda - 1$, $\{1/x, \sqrt{|x|}\}$.

52) $9\lambda^2 - 1$, $\{\sqrt[3]{x}, 1/\sqrt[3]{x}\}$.

53) $\lambda^2 + 6\lambda + 9$, $\{x^{-3}, x^{-3}\ln|x|\}$.

54) λ^2, $\{1, \ln|x|\}$.

55) $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, $\{x\sin(\ln|x|), x\cos(\ln|x|)\}$.

56) $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$, $\{x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}\}$.

57) $\lambda^3 - \lambda$, $\{x, 1/x, 1\}$.

58) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$, $\{x^2, x^2\ln x, x^2\ln^2 x\}$.

59) $\lambda^3 + \lambda$, $\{1, \sin(\ln|x|), \cos(\ln|x|)\}$.

60) $\lambda^3 - 3\lambda + \lambda^2 - 3$, $\{1/x, |x|^{\sqrt{3}}, |x|^{-\sqrt{3}}\}$.

61) $\lambda^3 - 10\lambda^2$, $\{1, \ln|x|, x^{10}\}$.

62) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$, $\{1/x, |x|^{-1/2}\sin(\sqrt{3}/2 \cdot \ln|x|), |x|^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2 \cdot \ln|x|)\}$.

63) $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda$, $\{1, \frac{\sin(\ln x^2)}{x^2}, \frac{\cos(\ln x^2)}{x^2}\}$.

64) $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 25\lambda - 39$, $\{x^3, x^2\sin(\ln x^3), x^2\cos(\ln x^3)\}$.

65) $\lambda^2 + 3i\lambda - 2$, $\{|x|^{-i}, |x|^{-2i}\}$.

66) $\lambda^2 - 20i\lambda - 100$, $\{|x|^{10i}, |x|^{10i}\ln|x|\}$.

67) $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 3 = 0$, $\{|x|^{-\sqrt{2}}\sin(\ln x), |x|^{-\sqrt{2}}\cos(\ln x)\}$.

68) Charakteristický polynom $\lambda^2+\lambda-12$ má kořeny 3 a -4, fundamentální systém je x^3 a x^{-4}. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = (a\ln x + b)\cos(\ln x) + (c\ln x + d)\sin(\ln x)$. Dostáváme $c = 1/10$, $a = -13/10$, $b = -29/425$ a $d = 181/850$. Všechna řešení jsou

$$\left(\frac{1}{10}\ln x + \frac{181}{850}\right)\sin(\ln x) - \left(\frac{13}{10}\ln x + \frac{29}{425}\right)\cos(\ln x) + cx^3 + \frac{d}{x^4},$$

$x \in (0, +\infty)$.

69) Charakteristický polynom $2\lambda^2 - 5\lambda + 3$ má kořeny 1 a 3/2, fundamentální systém je x a $x\sqrt{x}$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = ax^{3/2}\ln x$ ($\alpha = 3/2$, $\beta = 0$, $k = 1$, $m = 0$). Dostáváme $a = 1$, všechna řešení tedy jsou

$$x\sqrt{x}\ln x + cx + dx\sqrt{x},$$

$x \in (0, +\infty)$.

70) Charakteristický polynom $\lambda^2 + 1$ má kořeny $\pm i$, fundamentální systém je $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = \ln x(a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x))$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$, $k = 1$, $m = 0$). Dostáváme $a = 1$, $b = 0$, všechna řešení tedy jsou

$$\ln x(a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)) + c\sin(\ln x) + d\cos(\ln x),$$

$x \in (0, +\infty)$.

71) Charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 6$ má kořeny 3 a -2, fundamentální systém je x^3, $1/x^2$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = (a\ln x + b)x^2$ ($\alpha = 2$, $\beta = 0$, $k = 0$, $m = 1$). Dostáváme $a = 4$, $b = 3$, všechna řešení tedy jsou

$$(4\ln x + 3)x^2 + cx^{-2} + dx^3,$$

$x \in (0, +\infty)$.

72) Eulerova rovnice, substituujeme $x = e^t$, dostáváme

$$z'' - 2z' + z = \frac{e^t}{t+1}.$$

Očekáváme řešení ve tvaru $c(t)e^t + d(t)te^t$, variací konstant získáváme $c(t) = -\int \frac{t}{t+1}dt = -t + \ln|t+1|$, $d(t) = \int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t+1|$. Tedy

$$y(x) = x(\ln|1 + \ln x| - \ln x) + x\ln x\ln|1 + \ln x| + cx + dx\ln x.$$

73) Eulerova rovnice, substituujeme $x = e^t$, dostáváme

$$z''' - 3z'' + 3z' - z = \frac{e^t}{t^2+1}.$$

Očekáváme řešení ve tvaru $c(t)e^t + d(t)te^t + f(t)t^2e^t$, variací konstant získáváme $f(t) = \int \frac{1}{2}\ \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$, $d(t) = \int -\frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+1|$, $c(t) = \int \frac{1}{2}\ \frac{t^2}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}(t - \operatorname{arctg} t)$. Tedy

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x(\ln x - \operatorname{arctg}\ln x) - x\ln x\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x + 1| + x\ln^2 x\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\ln x.$$

74) Je třeba ukázat, že všechny funkce $|x|^\lambda \ln^r |x|$ (pro příslušná r a λ) řeší rovnici a že tyto funkce jsou lineárně nezávislé. Důkaz je obdobný důkazu věty o fundamentálním systému pro rovnice s konstantními koeficienty. ...

75) Proveďte substituci $z(t) = y(e^t)$ a použijte větu o speciální pravé straně pro rovnice s konstantními koeficienty.

76) Máme-li řešení y_1 na $(0, +\infty)$ a definujeme $y_2(x) := y_1(-x)$ pro $x < 0$, dostáváme

$$\mathscr{E}[y_2](x) = \mathscr{E}[y_1(-x)] = f(-x) = f(x),$$

tedy polynomy r_1, r_2 jsou stejné na kladné i záporné poloose.