Eulerovy rovnice

Rovnice

$$\mathscr{E}[y] = f(x)\,, \qquad \mathscr{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^{(n-k)}\,, \tag{17}$$

$b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.

Jde o speciální případ lineární rovnice n-tého řádu s nekonstantími koeficienty, kde koeficient u n-té derivace je roven $b_k x^{n-k}$. Klíčový předpoklad o nenulovosti koeficientu u nejvyšší derivace je splněn v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde také rovnici uvažujeme. Eulerovy rovnice jsou jednou z mála tříd rovnic, pro které umíme najít fundamentální systém.

První způsob řešení

Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = |x|^\lambda$. Dostaneme $\mathscr{E}[y] = |x|^\lambda p(\lambda)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(n-k)+1)b_k \tag{18}$$

nazýváme charakteristický polynom rovnice (17). Názorně: y odpovídá 1, xy' odpovídá λ, $x^2y^{(2)}$ dá $\lambda(\lambda-1)$, $x^3y^{(3)}$ dá $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, atd.

Odtud: je-li λ_0 kořen $p(\lambda)$ násobnosti k, pak funkce

$$|x|^{\lambda_0},\ |x|^{\lambda_0}\ln|x|,\ \dots, |x|^{\lambda_0}\ln^{k-1}|x| \tag{19}$$

řeší homogenní úlohu $\mathscr{E}[y] = 0$. Vezmeme-li funkce typu (19) pro všechny kořeny charakteristického polynomu, získáme fundamentální systém.

V případě komplexně sdružených kořenů $\lambda = a \pm ib$ nahrazujeme dvojici funkce $|x|^{a\pm ib}$ reálnou a imaginární částí, což je

$$|x|^a \sin(b\ln|x|)\,, \quad |x|^a\cos(b\ln|x|)\,.$$

Příklad 8. Najděte všechna řešení rovnice

$$x^3y^{(3)} - 2xy' + 4y = 0.$$

Řešení. Charakteristický polynom je

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda + 4 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2\,.$$

Fundamentální systém tvoří funkce $|x|^{-1}$, $|x|^2$ a $|x|^2\ln|x|$. S výjimkou argumentu logaritmu můžeme psát x místo $|x|$.

Druhý způsob řešení — substituce

Substitucí $z(t) := y(e^t) = y(x)$ převedeme Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty. Tento způsob je sice zdlouhavější, ale vysvětluje důležité souvislosti (například to, proč v prvním způsobu hledáme řešení ve tvaru $|x|^\lambda$).

Příklad 9. Řešte rovnici
$$x^2y^{(2)} + y = 0.$$

Řešení. Substituce $z(t) := y(e^t) = y(x)$ na intervalu $x \in (0, +\infty)$ nám dává $z'(t) = y'(e^t)e^t = xy'(x)$, $z''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + z'(t) = x^2y''(x) + z'(t)$. Dosazením do rovnice získáváme
$$z'' - z' + z = 0$$

Charakteristický polynom je tedy
$$\lambda(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - \lambda + 1\,.$$

Kořeny jsou $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, reálný fundamentální systém tvoří funkce $e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$, $e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$, tj. po zpětném dosazení
$$\sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\,,\ \sqrt{x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\,.$$

Na intervalu $(-\infty, 0)$ získáme řešení substitucí $z(t) = y(-e^t)$. Celkem tedy máme fundamentální systém
$$\sqrt{|x|}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)\,,\ \sqrt{|x|}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)$$
na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

Rovnici s nenulovou pravou stranou můžeme řešit variací konstant. V druhém postupu si můžeme vybrat, zda použijeme variaci konstant v rovnici s neznámou z nebo až po zpětném dosazení pro rovnici s neznámou y. Jak je vidět z druhého postupu, nehomogenní rovnici můžeme také řešit pomocí věty o speciální pravé straně, pokud má pravá strana po zasubstituování tvar $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$. To odpovídá tvaru
$$t^\alpha(P(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q(\ln x)\sin(\beta\ln x))$$
před provedením substituce. Na základě věty o speciálním tvaru pravé strany (viz kapitola o lineárních rovnicích s konstantními koeficienty) můžeme tedy vyslovit následující větu, kterou pak můžeme aplikovat, aniž bychom prováděli substituci:

Věta 7 (Speciální pravá strana pro Eulerovy rovnice.)**.** *Nechť*

$$f(x) = |x|^\alpha \big[q_1(\ln|x|)\cos(\beta\ln|x|) + q_2(\ln|x|)\sin(\beta\ln|x|)\big]\,, \tag{20}$$

kde q_1*,* q_2 *jsou polynomy stupně* $\leq m$*. Nechť* $k \geq 0$ *vyjadřuje násobnost čísla* $\lambda = \alpha + \beta i$ *coby kořene charakteristického polynomu* (18) *Eulerovy rovnice* (17)*.*

Potom existují polynomy r_1*,* r_2 *stupně* $\leq m$ *takové, že*

$$y(x) = (\ln|x|)^k |x|^\alpha \big[r_1(\ln|x|)\cos(\beta\ln|x|) + r_2(\ln|x|)\sin(\beta\ln|x|)\big]$$

je řešení (17) *na intervalu* $(0, +\infty)$*.*

Příklad 10. Najděte všechna řešení rovnice

$$x^3 y^{(3)} - 2xy' + 4y = x^2.$$

Řešení. Z řešení Příkladu 1 víme, že fundamentální systém této rovnice je $|x|^{-1}$, x^2 a $x^2\ln|x|$. Charakteristický polynom má jednoduchý kořen -1 a dvojnásobný kořen 2. Pravá strana je ve speciálním tvaru, kde $\alpha + i\beta = 2$, tj. $k = 2$. Polynomy q_1, q_2 z Věty 7 jsou stupně 0. Existuje tedy partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = c\cdot(\ln|x|)^2 x^2$. Dosazením do rovnice získáme $c = 1/6$, tedy všechna řešení rovnice jsou

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2\ln^2|x| + \frac{a}{|x|} + bx^2 + cx^2\ln|x|, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$x \in (0, +\infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$.