Řešení

42) Metodou snižování řádu hledáme druhé řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x) = z(x)e^x$, po dosazení $z''(x) + 4z'(x)/(4-x^2) = 0$ dává řešení $a(x - 4\ln(x+2)) + b$. Druhá funkce fundamentálního systému je tedy $(x - 4\ln(x+2))e^x$. Variací konstant dostaneme $y_p = c(x)e^x + d(x)(x - 4\ln(x+2))e^x$, kde $c(x) = \int -(x+2)(x-4\ln(x+2))dx = -1/3x^3 - 2x^2 - 4x - 8/3 + 2(x+2)^2\ln(x+2)$ a $d(x) = \int x + 2dx = 1/2x^2 + 2x$.

43) Metodou snižování řádu hledáme druhé řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x) = z(x)/(x+1)$, po dosazení $x(x+1)z''(x) - 2z'(x) = 0$ dává řešení $a(x - 1/x + 2\ln x) + b$. Druhá funkce fundamentálního systému je $(x - 1/x + 2\ln x)/(x+1)$. Variací konstant dostaneme $y_p = c(x)/(x+1) + d(x)(x - 1/x + 2\ln x)/(x+1)$, kde $c(x) = \int -x(x+1)(x - 1/x + 2\ln x)dx = -1/4x^4 + x^2 - 2/3x^3\ln x - 1/9x^3 + x - x^2\ln x$ a $d(x) = \int x(x+1)dx = 1/2x^2 + 1/3x^3$.

44) Uhodneme řešení $y_1 = x$. Dopočítáme druhé řešení: $x^3v' - (x^4 + x^2)v = 0$, $v = xe^{x^2/2}$, $z = e^{x^2/2}$, $y_2(x) = xe^{x^2/2}$.

45) Uhodneme řešení $y_1 = e^x$. Dopočítáme druhé řešení $y_2(x) = e^x \int_1^x e^{-2t}/t dt$ na $(0, +\infty)$. Protože integrál nekonverguje pro $x \to 0$, toto řešení nelze prodloužit do nuly, tj. všechna řešení definovaná na $\mathbb{R}$ jsou $y(x) = c \cdot e^x$.

46) Uhodneme řešení $y_1 = x$. Dopočítáme druhé řešení: $(x^2+1)v' + (x^2 + 2(1+x^2))v = 0$, $v = x^{-2}\sqrt{1+x^2}^{-1}$, $z = -\sqrt{1+x^2}/x$, $y_2(x) = -\sqrt{1+x^2}$.

47) Uhodneme řešení $y_1 = e^x$. Dopočítáme druhé řešení: $(x+1)v' + (-xe^x + 2(1+x)e^x)v = 0$, $v = e^{-2x}e^{\operatorname{arctg} x}$, $z = \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt$, $y_2(x) = e^x \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt$. Počáteční podmínku splňuje řešení

$$y(x) = e^x - e^x \int_0^x e^{-2t}e^{\operatorname{arctg} t}dt.$$