Metoda snižování řádu

Uvažujme homogenní lineární rovnici 2. řádu s nekonstantními koeficienty

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

u které známe nebo umíme uhodnout jedno řešení $y_1(x)$. Potom umíme dopočítat druhé řešení fundamentálního systému následujícím způsobem:

Zvolme $y(x) = y_1(x)z(x)$ a počítejme $y' = y_1'z + y_1z'$ a $y'' = y_1''z + 2y_1'y' + y_1z''$. Odtud

$$\begin{aligned} a_2(x)(y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'') + a_1(x)(y_1'z + y_1z') + a_0(x)y_1z \\ = z(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + a_2(x)y_1z'' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')z' \\ = a_2(x)y_1z'' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')z', \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože y_1 je řešení homogenní rovnice. Položíme-li nyní $v = z'$, dostáváme pro v rovnici

$$a_2(x)y_1v' + (a_1(x)y_1 + 2a_2(x)y_1')v = 0,$$

což je lineární rovnice 1. řádu, kterou umíme řešit.

Příklad 7. Najděte všechna řešení rovnice

$$y'' + \frac{x-3}{x}y' + \frac{x-3}{x^2}y = 0.$$

Řešení. Uhádneme řešení $y_1(x) = x$. A zavedeme substituci $y(x) = xz(x)$. Dostaneme rovnici $xv' = (1-x)v$, tj. $\ln|v| = \ln x - x + c$, $v = \pm e^c x e^{-x}$, $z = ke^{-x}(-x-1)$. Druhá funkce fundamentálního systému je $e^{-x}(-x^2-x)$ a všechna řešení rovnice jsou $y(x) = cx + de^{-x}(-x^2-x)$.