Úlohy

28. Najděte všechna řešení rovnice $y'' + 2y' + y = f(t)$.

29. Uvažujme rovnici $y'' - 2y' + y = t^2 + 1$. O kolik se liší řešení s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ od řešení s počáteční podmínkou $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$ v čase $t = 5$?

30. Uvažujme počáteční úlohu $y'' - 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 1$. O kolik se liší řešení s pravou stranou $f(t) = 1+t$ od řešení s pravou stranou $\tilde{f}(t) = 1+\sin t$ (a stejnou počáteční podmínkou) v čase $t = 1$?

31. Ukažte, že je-li $x(0) \geq 0$, $x'(0) > -x(0)$ a $x''(t) \geq x(t)$ pro všechna $t > 0$, potom $x(t) \geq 0$ pro všechna $t > 0$.

32. Ukažte, že je-li $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ a $x''(t) \geq -x(t)$ pro všechna $t > 0$, potom $x(t) \geq \sin t$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Ukažte, že pro $x(0) > 0$ tvrzení neplatí.

33. Nechť funkce $e^{-t}(x'''(t) - x'(t)) \geq 1/100$ pro $t \in (100, +\infty)$. Potom $x(t) \to +\infty$. Dokažte nebo najděte protipříklad.

34. Nechť $x'''(t) - x'(t) \to +\infty$ pro $t \to +\infty$. Potom $x(t) \to +\infty$. Dokažte nebo najděte protipříklad.

35. Uvažujme děj popsaný rovnicí $y''-3y'+2y = t$ s naměřeným počátečním stavem $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$. S jakou přesností musíme znát y_0, abychom měli jistotu, že nepřesné řešení se od přesného neliší na intervalu $[0, 10]$ více než o 1?

36. Uvažujme kmitání popsané rovnicí $y''+y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, kde f je vnější síla, kterou umíme regulovat. Ukažte, že pokud vnější sílu změníme o málo, kmitání se změní o málo. Zformulujte přesně zadání problému.

37. Ukažte, že pro soustavu s konstantními koeficienty platí

$$y(t) = \Phi(t - t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - s) f(s) ds.$$

38. Ukažte, že Věta 4 je speciálním případem Věty 6.

39. Rozhodněte, zda v situaci z Příkladu existuje právě jedno omezené řešení.

40. Uvažujme nelineární soustavu rovnic $Y' = AY + F(Y)$, kde F je L-lipschizovská. Pro každou počáteční podmínku $Y(t_0) = Y_0$
(a) existuje řešení definované aspoň na $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$.
(b) existuje řešení definované na celém $\mathbb{R}$.

41. Uvažujme soustavu $Y' = AY + b(t)$, kde b je T-periodická. Ukažte, že
(a) příslušná homogenní rovnice má netriviální S-periodické řešení, právě když $1 \in \sigma(e^{SA})$ (1 je vlastním číslem matice e^{SA}).

(b) pokud $1 \notin \sigma(e^{TA})$, pak existují $d \in \mathbb{R}^n$, T-periodické funkce $F : \mathbb{R} \to R^{n\times n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a matice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že řešení nehomogenní rovnice s počáteční podmínkou $Y(0) = y_0$ je $Y(t) = F(t)C^n(y_0 + d) - F(t)d + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(c) pokud $1 \notin \sigma(e^{TA})$, pak existuje právě jedno T-periodické řešení nehomogenní rovnice.