Nelineární systémy

V této kapitole si ukážeme, jak lze řešit některé nelineární autonomní soustavy rovnic. Uvažujme soustavu

$$X' = F(X), \tag{1}$$

kde $X : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce a $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce. Speciálním případem budou soustavy dvou rovnic

$$x' = f(x,y), \tag{2}$$

$$y' = g(x,y), \tag{3}$$

kde $X = \binom{x}{y}$. Také se budeme zabývat některými nelineárními rovnicemi vyšších řádů. Ty, jak víme, lze převést na soustavu rovnic prvního řádu.

První způsob řešení

První způsob řešení, vhodný pro systémy dvou rovnic, výjimečně i více rovnic, je založen na následující větě (návod k důkazu najdete mezi úlohami):

Věta 1. *Nechť f, g jsou spojité funkce, x, $y : (a,b) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in (a,b)$, $f(x(t_0), y(t_0)) \neq 0$.*

(i) Pak existuje okolí U bodu t_0 takové, že pokud $t \mapsto (x(t), y(t))$ je řešení soustavy (2)-(3) na U, potom funkce $\tilde{y} := y \circ x^{-1}$ na $x(U)$ je řešením rovnice

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \frac{g(z,\tilde{y})}{f(z,\tilde{y})}, \qquad \tilde{y}(x(t_0)) = y(t_0). \tag{4}$$

(ii) Pro každé okolí U bodu t_0 platí, že pokud $\tilde{y}$ je řešením rovnice (4) na $x(U)$ a x je řešením rovnice $x' = f(x, \tilde{y}(x))$ na U, pak funkce $\tilde{y} \circ x$ je řešením rovnice (3) na U.

Všimněte si, že rovnici (4) získáme, pokud formálně vydělíme rovnici (3) rovnicí (2):

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) \quad \& \quad \frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Věta 1 říká, že chceme-li najít řešení soustavy, můžeme nejprve vyřešit rovnici (4), která nám dá orbity řešení v rovině x-y, a poté dopočítat závislost na t.

Příklad 1. Najděte řešení soustavy

$$x' = x^2 y,$$

$$y' = xy^2$$

Řešení. Nejprve najdeme funkci $\tilde{y}$ z Věty 1, řešíme tedy rovnici $d\tilde{y}/dx = \tilde{y}/x$. Pomocí separace proměnných dostáváme $\tilde{y}(x) = kx$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Podmínka $f(x, y) \neq 0$ není splněna, je-li x nebo y nulové. Vyloučíme tedy počátek souřadnic a případ $k = 0$, ty dořešíme později. Pokud si řešení nakreslíme do roviny s osami x a y, budou orbity řešení ležet na polopřímkách procházejících počátkem. Zbývá dořešit, kterým směrem budou řešení polopřímky probíhat a zda je proběhnou celé, nebo se někde zastaví.

Dopočítáme tedy závislost na t: Z první rovnice soustavy máme $x' = kx^3$, což dává $-1/2x^{-2} = kt + c$, tj.

$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2(kt+c)}} \quad \text{a} \quad y(t) = \frac{\pm k}{\sqrt{-2(kt+c)}}.$$

Řešení je definováno na $(-\infty, -c/k)$ pro $k > 0$ a na $(-c/k, +\infty)$ pro $k < 0$ Odtud vidíme, že maximální řešení proběhnou celou polopřímku, některá od počátku k nekonečnu, jiná od nekonečna k počátku souřadnic. Protože k počátku se blíží pro $t \to \pm\infty$, řešení nelze prodloužit přes počátek.

Nyní si uvědomte, že z části (ii) Věty 1 plyne, že nalezené dvojice funkcí skutečně řeší soustavu (2)-(3). Z části (i) naopak plyne, že žádná další řešení na množině $\{(x, y) : \ x \neq 0 \text{ a } y \neq 0\}$ neexistují (Kdyby existovala, našli bychom k nim příslušná další řešení rovnice (4), což je spor - z metody separace proměnných víme, že řešení rovnice (4) jsme našli všechna.)

Zbývá nalézt řešení na souřadných osách, tj. případ, kdy $y(t_0) = 0$ nebo $x(t_0) = 0$. V tom případě dostáváme stacionární řešení

$$(x(t), y(t)) = (x(t_0), y(t_0)), \ t \in \mathbb{R}$$

(ihned ze soustavy (2)-(3), protože x' i y' musí být nulová). Z věty o jednoznačnosti plyne, že žádná jiná řešení na souřadných osách (protínající souřadné osy) neexistují.

Druhý způsob řešení — první integrál

Tento způsob řešení lze použít i pro soustavy více proměnných.

Definice 1. Funkce $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá *první integrál* diferenciální rovnice (1), jestliže V je konstantní podél každého řešení rovnice (1) a je nekonstantní v Ω.

Poznámka. Řešíme-li soustavu prvním způsobem a získanou rovnici (4) pak metodou separace proměnných, může se stát, že po integraci obou stran nedokážeme explicitně vyjádřit závislost $\tilde{y}$ na x. Nicméně získaná rovnost $G(y) = H(x) + c$ nám dává první integrál soustavy: $V(x, y) = G(y) - H(x)$.

Je-li tedy V diferencovatelná funkce, musí splňovat

$$0 = \frac{d}{dt}V(Y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial Y_i} Y_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial Y_i} F_i(Y).$$

Příklad 2. Najděte všechna řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' \sin y &= 1, \\ y' \sin y &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Řešení. Dosazením první rovnice do druhé máme $y' = x'y/x$, nebo-li $y'/y = x'/x$. Integrací získáme

$$\frac{d}{dt}(\ln|y|) = \frac{d}{dt}(\ln|x|),$$

tj. $C = \ln|y| - \ln|x| = \ln|y/x|$, tj. $y/x = K$. Funkce $V(x,y) := y/x$ je tedy 1. integrál soustavy.

Protože máme $y = Kx$, dosadíme do první rovnice a získáme $\sin(Kx)x' = 1$, tj. $-\frac{1}{K}\cos(Kx) = t + c$, odkud $-Kt - Kc \in [-1, 1]$

$$x(t) = K^{-1}(\arccos(-Kt - Kc) + 2m\pi),\ y(t) = \arccos(-Kt - Kc) + 2m\pi,$$

resp.

$$x(t) = -K^{-1}(\arccos(-Kt - Kc) + 2m\pi),\ y(t) = -(\arccos(-Kt - Kc) + 2m\pi).$$

Dosazením do soustavy snadno ověříme, že nalezené funkce jsou řešení na intervalech $(-1/K - c, 1/K - c)$. Tyto intervaly nelze prodloužit, protože v krajních bodech je $\sin y = 0$ a rovnice tedy nemohou být splněny.

Příklad 3. Najděte všechna řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy, \\ y' &= xz \\ z' &= yz \end{aligned}$$

Řešení. Vynásobíme-li křížem 1. a 3. rovnici, dostaneme $x'z = z'x$, tj. $x'/x = z'/z$, tj. pro $x \neq 0 \neq z$

$$z/x = K_1 \tag{5}$$

podobně jako v předchozím příkladu. Vynásobíme-li nyní 1. a 2. rovnici, máme $x'z = y'y$. Zároveň ale víme, že $x'z = z'x$, tedy $z'x + x'z = 2yy'$, tj. po integraci

$$y^2 - zx = K_2. \tag{6}$$

Máme dva nezávislé první integrály: $V_1(x,y,z) = z/x$ a $V_2(x,y,z) = y^2 - zx$.

Dosadíme-li z (6) do druhé rovnice, máme $y' = y^2 - K_2$, tj. pro $K_2 > 0$ je

$$\ln\left(\frac{y+\sqrt{K_2}}{y-\sqrt{K_2}}\right) = t + c,$$

$$y = \sqrt{K_2}\,\frac{e^t e^c + 1}{e^t e^c - 1},$$

$t \in (-\infty, -c)$, $(-c, +\infty)$. Pro $K_2 < 0$ máme $1/\sqrt{-K_2}\,\mathrm{arctg}(y/\sqrt{-K_2}) = t + c$, tj. $y = \sqrt{-K_2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{-K_2}(t+c))$, $t \in (-\pi/2/\sqrt{-K_2} - c, \pi/2/\sqrt{-K_2} - c)$. Pro $K_2 = 0$ máme $y = -1/(t+c)$, $t \in (-\infty, -c)$, $(-c, +\infty)$, resp. $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Dosadíme-li nyní za x z (5) do (6), máme $x = \pm\sqrt{(y^2 - K_2)/K_1}$ a $z = \pm\sqrt{K_1(y^2 - K_2)}$. Řešení tedy jsou

$$\pm\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{2e^{\frac{t+c}{2}}}{e^{t+c}-1}, \quad \sqrt{K_2}\,\frac{e^t e^c + 1}{e^t e^c - 1}, \quad \pm\sqrt{K_2 K_1}\frac{2e^{\frac{t+c}{2}}}{e^{t+c}-1}, \quad K_1, K_2 > 0$$

na intervalech $(-\infty, -c)$, $(-c, +\infty)$. Dále

$$\pm\sqrt{\frac{-K_2}{K_1}(\mathrm{tg}(\sqrt{-K_2}(t+c)) - 1)}, \quad \sqrt{-K_2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{-K_2}(t+c)),$$
$$\pm\sqrt{-K_2 K_1(\mathrm{tg}(\sqrt{-K_2}(t+c)) - 1)}, \quad K_1 > 0, K_2 < 0$$

na intervalech $(-\pi/2/\sqrt{-K_2} - c, \pi/4/\sqrt{-K_2} - c)$ a $(\pi/4/\sqrt{-K_2} - c, \pi/2/\sqrt{-K_2} - c)$. Dále

$$\pm\sqrt{\frac{1}{K_1}}\frac{-1}{t+c}, \quad \frac{-1}{t+c}, \quad \pm\sqrt{K_1}\frac{-1}{t+c}, \quad K_1 > 0, K_2 = 0,$$

na intervalech $(-\infty, -c)$, $(-c, +\infty)$. A konečně stacionární řešení $[x, 0, z]$, $t \in \mathbb{R}$, kde x nebo z je nulové.

Zbývá dořešit případ, kdy je x nebo z nulové. Pokud je $x(t_0) = 0$, máme $x' = 0$, $y' = 0$ a $z' = yz$, odkud dostáváme řešení (jednoznačně určené) $[0, c, de^{ct}]$, $t \in \mathbb{R}$. Je-li $z(t_0) = 0$, máme $z' = 0$, $y' = 0$ a $x' = xy$, odkud dostáváme řešení (jednoznačně určené) $[de^{ct}, c, 0]$, $t \in \mathbb{R}$.

Úlohy na soustavy rovnic

Nalezněte obecná řešení následujících soustav:

1. $x' = xy$, $y' = xy$ $(x, y > 0)$

2. $x' = x/(x+y)^2$, $y' = y/(x+y)^2$ $(x, y > 0)$

3. $x' = x^2/y$, $y' = x$ $(x, y > 0)$

4. $x' = x/(x-y)$, $y' = y/(x-y)$ $(x > y > 0)$

5. $x' = y^2$, $y' = yz$, $z' = -z^2$ $(z, y > 0)$

6. $x' = -x^2$, $y' = xy - 2z^2$, $z' = xz$ $(x > 0)$

7. $x' = 1 + z$, $y' = y^2 e^{3x}$, $z' = (1+z)^2$ $(y > 0,\ z > -1)$

8. $x' = (1-x)^4$, $y' = (x-1)^3$, $z' = z^3 e^{-y}$ $(x > 1,\ z > 0)$

9. $x' = z^2 - y^2$, $y' = z$, $z' = -y$ $(y > z > 0)$

10. $x' = x - y^2$, $y' = y$, $z' = x + y^2 + z$ $(y > 0)$

11. Dokažte Větu 1 (v první části nejprve ukažte, že funkce x má funkci inverzní na nějakém okolí bodu t_0).

12. Pro systém dravec–kořist (kdo je kdo?) $x' = kx - axy$, $y' = -ly + bxy$, $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, a, b, k, $l > 0$
(a) Dokažte, že ani jeden druh nevyhyne.
(b) Najděte první integrál soustavy.
(c) Nakreslete průběhy různých řešení.

13. Najděte první integrál soustavy $x' = x + y$, $y' = x^2 - y^2$.

14. Najděte první integrál soustavy $x' = (x-y)x^2$, $y' = x^3 - y^3$ na množině $x > 0$.

15. Nechť $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ a $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda(X) \neq 0$. Ukažte, že soustavy $X' = F(X)$ a $X' = \lambda(X)F(X)$ mají stejné orbity.

Řešení

1) $x(t) = c(1 - e^{c(t+d)})^{-1}$, $y(t) = ce^{c(t+d)}(1 - e^{c(t+d)})^{-1}$, $t \in (-\infty, -d)$ pro $c > 0$, $t \in (-d, +\infty)$ pro $c < 0$.

2) $x(t) = \pm\sqrt{2}/(k+1)\ \sqrt{t + c(k+1)^2}$, $y(t) = \pm\sqrt{2}k/(k+1)\ \sqrt{t + c(k+1)^2}$, $t \in (-c(k+1)^2, +\infty)$ pro $k > 0$.

3) $x(t) = e^{t/k+c}$, $y(t) = ke^{t/k+c}$, $t \in \mathbb{R}$.

4) $x(t) = t/(1-k) + c$, $y(t) = kt(1-k) + ck$, $t \in (-c/(1-k), +\infty)$, $k \in (0, 1)$.

5) $z(t) = 1/(c_1 - t)$, $y(t) = c_2(c_1 - t)$, $x(t) = c_2^2 t(c^2 - ct + t^2/3) + c_3$, $t \in (-\infty, c_1)$, $c_2 > 0$.

6) $x(t) = 1/(c_1 - t)$, $z(t) = c_2(c_1 - t)$, $y(t) = 1/(c_1 - t) \cdot (2c_3 - c_2^2 t^4 + 4c_2^2 c_1 t^3 - 6c_2^2 c_1^2 t^2 + 4c_2^2 c_1^3 t - c_2^2 c_1^4)/2$, $t \in (-\infty, c_1)$

7) $x(t) = -\ln(-t-c)+b$, $y(t) = \frac{2(t+c)^2}{e^{3b}+2k(t+c)^2}$, $z(t) = -1-1/(t+c)$, $t \in (-\infty, -c)$ pokud $k \geq 0$. Pro $k < 0$ je $t \in (-\sqrt{-e^{3b}/2k}-c, -c)$. $c, b \in \mathbb{R}$.

8) $x(t) = 1-1/\sqrt[3]{3(t+c)}$, $y(t) = -\frac{1}{3}\ln|t+c|+b$, $z(t) = (-2d-8/3e^{-b}|t+c|^{4/3})^{-1/2}$, $t \in (3de^b/4-c, -c)$, $d < 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

9) $x(t) = \frac{1}{2}(c_1-c_2-\sin(2t+2c_3))$, $y(t) = \sqrt{c_1}\sin(t+c_3)$, $z(t) = \sqrt{c_1}\cos(t+c_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

10) $x(t) = c_1c_2e^t - c_2^2e^{2t}$, $y(t) = c_2e^t$, $z(t) = (c_2t+c_3)e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

11) (i) Protože $x' = f(x,y) \neq 0$, je x prostá na nějakém okolí bodu t_0. Označte inverzní funkci T a derivujte $y(T(x))$ podle x. Část (ii) plyne z derivace složené funkce.

12) (a) Pro počáteční podmínku $x_0 = 0$ máme $x' = 0$, $y' = -ly$, pro $y_0 = 0$ zase $y' = 0$, $x' = kx$. Tedy existují řešení ležící na osách a z jednoznačnosti plyne, že řešení startující mimo osy se na osy nenapojí.
(b) Dostáváme

$$0 = \frac{x'}{x}(-l+bx) - \frac{y'}{y}(k-ay),$$

tj. po integraci $-l\ln x + bx - k\ln y + ay = c$ a máme první integrál.
(c) Zafixujeme-li y a vyšetříme průběh funkce $-l\ln x + bx$, zjistíme, že funkce nabývá dané hodnoty buď ve dvou, v jednom nebo v žádném bodě. Odtud plyne, že řešení jsou periodická. Analyzováním derivace řešení dojdeme k tomu, že obíhají stacionární řešení $(l/b, k/a)$ proti směru hodinových ručiček.

13) Podle Věty 1 dostáváme $y(x) = ce^{-x}+x-1$. Odtud $V(x,y) = e^x(y-x+1)$.

14) Podle Věty 1 dostáváme $y'(x) = 1+y/x+y^2/x^2$. Odtud $\mathrm{arctg}(y/x) = \ln x + c$, tj. $V(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x) - \ln x$.

15) Označíme-li složky F jako (f,g), má rovnice (4) z Věty 1 tvar

$$\tilde{y}' = \frac{g(x,\tilde{y})}{f(x,\tilde{y})}, \text{ resp. } \tilde{y}' = \frac{\lambda(x,\tilde{y})g(x,\tilde{y})}{\lambda(x,\tilde{y})f(x,\tilde{y})}.$$

Tvrzení plyne z Věty 1.

Polární souřadnice

V některých případech lze systém rovnic vyřešit převodem do polárních souřadnic. Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y), \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{7}$$

na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zaveďme proměnné r, φ rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

Z věty o implicitních funkcích plyne, že na okolí libovolného bodu kromě počátku definují tyto rovnice funkce $r(x,y)$, $\varphi(x,y)$, které jsou třídy C^∞. Máme-li nyní řešení $(x(\cdot), y(\cdot))$ třídy C^1 soustavy (7) v nějakém kruhu neobsahující počátek, jsou funkce $r(\cdot) := r(x(\cdot), y(\cdot))$, $\varphi(\cdot) := \varphi(x(\cdot), y(\cdot))$ rovněž třídy C^1 a platí

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\phi - r\sin\varphi \cdot \varphi', \\ y' &= r'\sin\phi + r\cos\varphi \cdot \varphi' \end{aligned}$$

Funkce r a φ musí tedy splňovat rovnice

$$\begin{aligned} r'\cos\phi - r\sin\varphi \cdot \varphi' &= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ r'\sin\phi + r\cos\varphi \cdot \varphi' &= g(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

Po úpravách

$$\begin{aligned} r' &= \cos\varphi \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot g(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ r\varphi' &= \cos\varphi \cdot g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - \sin\varphi \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

Jsou-li naopak r a φ funkce třídy C^1 s hodnotami v nějakém kruhu neobsahujícím počátek řešící (9), pak funkce x, y definované v (8) jsou také třídy C^1 a řeší (7).

K převodu do polárních souřadnic jsou vhodné zejména rovnice obsahující $x^2 + y^2$ a/nebo rotační symetrie typu $(-y, x)$.

Příklad 4. Najděte všechna řešení systému

$$x' = x(x^2 + y^2) \tag{10}$$

$$y' = y(x^2 + y^2). \tag{11}$$

Řešení. Počátek je evidentně stacionární řešení. Mimo počátek můžeme systém převést do polárních souřadnic:

$$r'\cos\phi - r\sin\phi\phi' = r^3\cos\phi \tag{12}$$

$$r'\sin\phi + r\cos\phi\phi' = r^3\sin\phi. \tag{13}$$

Součet první rovnice vynásobené kosínem a druhé rovnice vynásobené sínem dává

$$r' = r^3,$$

odkud máme (metodou separace proměnných)

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{-2t+2c}}, \quad t \in (-\infty, c).$$

Odečteme-li první rovnici vynásobenou sínem od druhé rovnice vynásobené kosínem, dostaneme

$$r\phi' = 0,$$

tedy ϕ je konstantní funkce. Po převedení do kartézských souřadnic získáme všechna řešení ve tvaru

$$x(t) = a\frac{1}{\sqrt{-2t+2c}}\ , \quad y(t) = \pm\sqrt{1-a^2}\frac{1}{\sqrt{-2t+2c}}\ , \quad t \in (-\infty, c),$$

$c \in \mathbb{R}$, $a \in [-1, 1]$.

Úlohy na polární souřadnice

16. Najděte všechna řešení rovnice $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

17. Najděte všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x' &= x^2 y && (14) \\ y' &= xy^2. && (15) \end{aligned}$$

18. Najděte všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x' &= y + ax(x^2+y^2) && (16) \\ y' &= -x + ay(x^2+y^2). && (17) \end{aligned}$$

19. Najděte všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2+y^2-1) && (18) \\ y' &= x + y(x^2+y^2-1). && (19) \end{aligned}$$

Řešení

16) Dle Věty 1 bude užitečné vyřešit soustavu $\frac{dy}{dt} = x - y$, $\frac{dx}{dt} = x + y$. Tu převedeme do polárních souřadnic a získáme $r' = r$, $\phi' = 1$. Odtud $\phi(t) = t + c$, $r(t) = de^t$, a tedy $x(t) = de^t \cos(t+c)$, $y(t) = de^t \sin(t+c)$. Grafy řešení jsou tedy části těchto křivek.

17) V polárních souřadnicích $\phi' = 0$, $r' = r^3 \cos\phi \sin\phi$, tedy $\phi(t) = \phi_0$, $r(t) = (-2t \sin\phi_0 \cos\phi_0 + d)^{-1/2}$.

18) V polárních souřadnicích $\phi' = -1$, $r' = ar^3$, tedy $r(t) = 1/\sqrt{2a(c-t)}$, $\phi(t) = \phi_0 - t$, $t \in (-\infty, c)$ pro $a > 0$, $t \in (c, +\infty)$ pro $a < 0$.

19) V polárních souřadnicích $\phi' = 1$, $r' = r(r^2-1)$, tedy $\phi(t) = t + \phi_0$, $r(t) = (1 - ke^{2t})^{-1/2}$ pro $k \leq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}\ln k)$.

Keplerovy zákony

V této kapitole si ukážeme, jak Keplerovy zákony vyplývají z Newtonova gravitačního zákona.

Newtonovy pohybové rovnice.

Nechť $X = (x, y, z)$ je poloha planety vůči Slunci, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Newtonův zákon dává

$$mX'' = -\frac{\kappa m M}{r^2}\frac{X}{r},$$

kde m, M je hmotnost planety a Slunce, κ je gravitační konstanta. Psáno po složkách

$$x' = -\frac{kx}{r^3}, \quad y' = -\frac{ky}{r^3}, \quad z' = -\frac{kz}{r^3},$$

kde označujeme

$$k = \kappa M. \tag{20}$$

Soustavu uvažujeme s počáteční podmínkou

$$X(0) = (x_0, 0, 0), \qquad X'(0) = (v_1, v_2, 0),$$

kde $x_0 > 0$ a $v_2 \neq 0$. Z počátečních podmínek a vět o jednoznačnosti plyne, že $z \equiv 0$; stačí tedy uvažovat problém v rovině (x, y).

Převedení do komplexní roviny.

Přejdeme k polárním souřadnicím (r, φ), kde užíváme komplexní zápis

$$Z = x + iy = re^{i\varphi}.$$

Odtud pro rychlost a zrychlení odvodíme

$$Z' = \big(r' + ir\varphi'\big)e^{i\varphi}, \tag{21}$$

$$Z'' = \Big\{\big(r'' - r(\varphi')^2\big) + i\big(2r'\varphi' + r\varphi''\big)\Big\}e^{i\varphi}. \tag{22}$$

Newtonův zákon v komplexním tvaru

$$Z'' = -\frac{k}{r^2}e^{i\varphi} \tag{23}$$

pak implikuje (dělíme funkcí $e^{i\varphi}$ a uvážíme reálnou a imaginární část)

$$r'' - r(\varphi')^2 = -\frac{k}{r^2}, \tag{24}$$

$$2r'\varphi' + r\varphi'' = 0. \tag{25}$$

Druhý Keplerův zákon.

Z rovnice (25) plyne, že $r^2\varphi'$ má nulovou derivaci, tedy

$$r^2\varphi' = c_1 \tag{26}$$

pro vhodnou konstantu c_1. Připomeňme vzorec pro plochu pod grafem v polárních souřadnicích:

$$\lambda_2(M) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi,$$

kde

$$M = \big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi);\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le f(\varphi)\big\}.$$

Substitucí $\varphi = \varphi(t)$, tedy

$$\alpha = \varphi(t_1), \quad \beta = \varphi(t_2), \quad d\varphi = \varphi'\,dt$$

plyne, že plocha opsaná průvodičem mezi časy t_1 a t_2 je

$$\mathcal{P}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\varphi'\,dt = \frac{c_1}{2}(t_2 - t_1). \tag{27}$$

Plocha tedy roste s časem *lineárně*, což je 2. Keplerův zákon.

První Keplerův zákon.

Předpokládejme nadále, že $c_1 > 0$. Potom (26) a (23) dávají

$$Z'' = -\frac{k}{c_1}e^{i\varphi}\varphi';$$

odsud

$$Z' = \frac{ik}{c_1}e^{i\varphi} + ic_2e^{i\varphi_0}.$$

Druhý člen je vhodně zapsaná integrační konstanta; můžeme předpokládat $c_2 \ge 0$. Srovnáme s (21), odkud plyne

$$\frac{ik}{c_1}e^{i\varphi} + ic_2e^{i\varphi_0} = \big(r' + ir\varphi'\big)e^{i\varphi},$$
$$\frac{ik}{c_1} + ic_2e^{-i(\varphi-\varphi_0)} = r' + ir\varphi'.$$

Vezmeme pouze imaginární část a opět použijeme (26):

$$\frac{k}{c_1} + c_2 \cos(\varphi - \varphi_0) = r\varphi' = \frac{c_1}{r},$$

$$r = \frac{c_1^2}{k + c_1 c_2 \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Bez újmy na obecnosti dále předpokládáme $\varphi_0 = 0$. Rovnici zapíšeme jako

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \tag{28}$$

kde definujeme

$$A := \frac{c_1^2}{k}, \qquad \varepsilon := \frac{c_1 c_2}{k}.$$

Jedná se o rovnici kuželosečky s ohniskem v počátku; případ $\varepsilon = 0$ (respektive $\varepsilon \in (0,1)$, $\varepsilon = 1$ a $\varepsilon > 1$) odpovídá kružnici (respektive elipse, parabole a hyperbole).

První Keplerův zákon se týká pohybu po elipse, tj. $\varepsilon \in (0,1)$. Značíme a, b hlavní a vedlejší poloosu, $E = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = E/a$ je délková a číselná výstřednost. V kartézských souřadnicích (28) přechází v

$$\left(\frac{x + E}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \lambda c_1^3 c_2, \\ a &= \lambda k c_1^2, \\ b &= \sqrt{\lambda} c_1^2, \\ \lambda &= \frac{1}{k^2 - c_1^2 c_2^2}. \end{aligned}$$

Třetí Keplerův zákon.

Je-li T čas periody oběhu, vzorec pro plochu elipsy spolu s (27) dává

$$\pi a b = \frac{c_1}{2} T;$$

užití vztahů pro b a a výše pak implikuje

$$T = 2\pi a \sqrt{\lambda} c_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} a^{3/2}.$$

Uvážíme-li, že konstanta k nezávisí na hmotnosti ani počáteční podmínce pohybu planety, máme 3. Keplerův zákon.

Zpětné odvození Newtonova zákona.

Předpokládejme 1. a 2. Keplerův zákon, tj.

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad r^2\varphi' = c_1.$$

Značíme-li opět $Z = re^{i\varphi}$,

$$Z' = \frac{c_1}{A} ie^{i\varphi} + \frac{c_1 i\varepsilon}{A}$$

a

$$Z'' = -\frac{c_1^2}{Ar^2} e^{i\varphi};$$

tedy zrychlení směřuje do počátku a je úměrné r^{-2}, což je ve shodě s Newtonovým zákonem.

Rovnice druhého řádu

Výše uvedené postupy lze použít také na rovnice druhého (a vyššího) řádu, které, jak víme, se dají převést na systémy rovnic.

Příklad 5. Nalezněte vzorec pro periodu řešení rovnice

$$x'' + x = 0$$

s počáteční podmínkou $x(0) = 0$, $x'(0) = c$.

Řešení. Tato rovnice je lineární a z teorie pro lineární rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty snadno spočítáme, že obecné řešení rovnice je $x(t) = a\sin t + b\cos t$, tedy perioda je 2π nezávisle na počáteční podmínce. Ukážeme zde ale obecnější postup, který lze použít pro rovnice typu

$$x'' + f(x) = 0.$$

Snadno ověříme, že

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x)$$

je první integrál rovnice, kde $F' = f$ a $y = x'$. Opravdu,

$$\frac{d}{dt}V(x(t), x'(t)) = f(x(t))x'(t) + x'(t)x''(t) = 0.$$

V našem případě tedy $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Tedy

$$x(t)^2 + (x'(t))^2 = k. \tag{29}$$

Jestliže x splňuje počáteční podmínku, máme navíc $0^2 + c^2 = k$, tj. $k = c^2$. Je zřejmé, že při rostoucím x se bude zmenšovat rychlost x', až systém dospěje do stavu $x(T) = c$, $x'(T) = 0$. Z rovnice (29), kterou můžeme nazývat zákon zachování energie, dostáváme

$$x' = \sqrt{c^2 - x^2},$$

tj. po vydělení, integraci a substituci (standardní postup pro rovnici se separovanými proměnnými, nebo také použití Barrowova vzorce)

$$\int_0^{x(T)} \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = T - 0.$$

Protože nás zajímá hodnota T pro kterou $x(T) = c$, známe horní mez integrálu na levé straně a po zintegrování získáváme

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - z^2}} = [\arcsin z]_0^1 = \frac{\pi}{2} = T.$$

Po dosažení maximální výchylky se systém vrátí do počátečního stavu, poté dosáhne stavu s nejvíce zápornou hodnotou x a opět se vrátí do původního stavu. Protože každá z těchto čtyř fází trvá T, je celková perioda $4T = 2\pi$. (Uvědomte si, že po těchto čtyřech fázích se systém bude nacházet ve stavu $x(4T) = 0$, $x'(4T) > 0$, tedy nutně $x'(4T) = c$, jedná se tedy o počáteční stav a protože je rovnice autonomní a řešení je jednoznačně určeno počáteční podmínkou, musí být $x(4T + t) = x(t)$, tedy řešení bude skutečně periodické s periodou $4T$.)

Úlohy na rovnice druhého řádů

20. Uvědomte si, že rovnici $x'' + f(x) = 0$, $f \in C^1(I)$ lze přepsat do tvaru $x'' + F'(x) = 0$, kde $F' = f$. Jedná se tedy o pohyb kuličky po svahu, zrychlení je dané sklonem tohoto svahu.
(a) Ukažte, že je-li $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) > 0$, pak pro počáteční podmínky blízko bodu $(x_0, 0)$, tj. $x(0) = x_0 + \varepsilon_1$, $x'(0) = \varepsilon_2$, dostaneme periodické řešení.
(b) Ukažte, že je-li $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) > 0$, pak bod $(x_0, 0)$ je stabilním (nikoli asymptoticky) stacionárním bodem rovnice.

21. Pomocí Věty 1 odvoďte první integrál pro rovnici druhého řádu $x'' + f(x) = 0$ (tj. funkci V takovou, že $t \mapsto V(x(t), x'(t))$ je konstantní podél řešení rovnice).

22. Najděte první integrál rovnice $x'' + \sin x = 0$, načrtněte řešení a s pomocí (zobecněného) Barrowova vzorce najděte vzorec pro periodu.

23. Najděte první integrál rovnice $x'' + 2x^3 = 0$, načrtněte řešení a s pomocí (zobecněného) Barrowova vzorce najděte vzorec pro periodu.

24. Za jak dlouho dospěje řešení rovnice $x'' = 1/2\ e^x$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ do hodnoty $x = \ln 5$?

25. Za jak dlouho dospěje řešení rovnice $x'' = \sinh x \cosh x$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ do hodnoty $x = 1$?

26. Uvažujme rovnici $x'' + f(x) = 0$ a buď $V(x, x') := V(x, y) := \frac{y^2}{2} + F(x)$, $F' = f$. Ukažte, že pokud $\nabla V(x, 0) \neq 0$, pak řešení procházející bodem $(x, 0)$ protíná osu x kolmo.

27. Uvažujte pohyb částice v centrálním gravitačním poli:

$$X'' + \nabla U(X) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

kde $U(X) = U_0(|X|)$, $U_0 \in C^2((0, +\infty), R)$. Ukažte, že orbita částice leží v rovině.

28. Spočtěte první integrál pro rovnici $x'' + x' + x = 0$.

29. Najděte první integrál rovnice $x'' + x^2 - x = 0$, načrtněte řešení a s pomocí (zobecněného) Barrowova vzorce najděte vzorec pro periodu.

Řešení

20) (a) První integrál je $V(x, y) = y^2/2 + F(x)$. F je klesající na $(x_0 - \delta, x_0)$ a rostoucí na $(x_0, x_0 + \delta)$ a BÚNO $F(x_0) = 0$. Má-li funkce V zůstat konstantní podél řešení, musí orbity tvořit uzavřenou křivku (rozmyslete si monotonii v proměnných x a y).
(b) Plyne z (a).

21) Ze soustavy $x' = y$, $y' = -f(x)$, dostáváme $y'(x) = -f(x)/y$, tj. $y^2/2 = -F(x) + c$. První integrál tedy vyjde $V(x, y) = y^2/2 + F(x)$.

22) $V(x, y) = 1 - \cos x + y^2/2$, $t = 4\int_0^{\arccos(1-c^2/2)} \frac{1}{\sqrt{2c^2+4(\cos x - 1)}} dx$. Po substitucích $z = \cos x$ a $y = (1 - z)/c^2$ dostaneme $t = 4\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{y(2-cy)(2-4y)}} dy$, tj. čím větší počáteční výchylka, tím větší perioda a naopak.

23) $V(x, y) = x^4/2 + y^2/2$, $t = 4\int_0^{\sqrt[4]{2c}} \frac{1}{\sqrt{2c-x^4}} dx$. Po substituci dostaneme $t = 4(2c)^{-1/4} \int_0^1 (1 - z^4)^{-1/2} dz$, tj. čím větší počáteční výchylka, tím menší perioda a naopak.

24) $V(x, y) = y^2/2 - e^x/2 = -1/2$ (velikost konstanty plyne z počátečních podmínek). Pak $t = \int_0^{\ln 5} (e^x - 1)^{-1/2} dx$. Po substituci $t = \operatorname{arctg} 2$.

25) $V(x, y) = y^2/2 - \cosh^2(x)/2 = 0$ (velikost konstanty plyne z počátečních podmínek). Pak $t = \int_0^1 (\cosh x)^{-1} dx = 2 \operatorname{arctg} e - \pi/2$.

26) Protože $0 = dV/dt(x,y) = yy' + f(x)x'$ a $y = 0$, $f(x) \neq 0$. Tedy $x' = 0$.

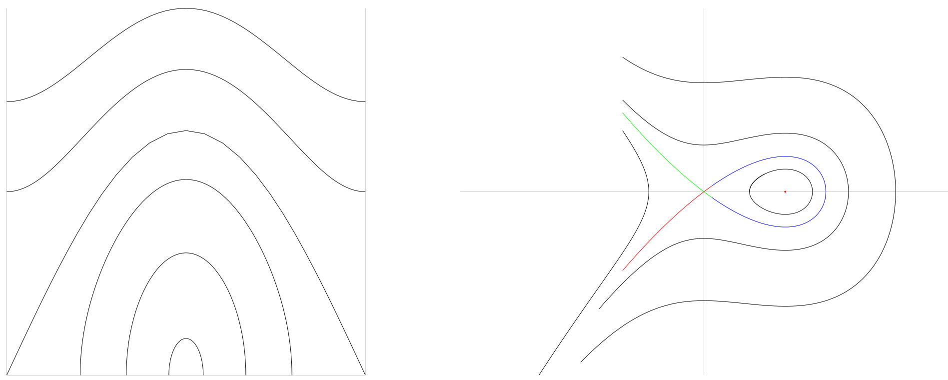
27) Zaveďme souřadnou soustavu tak, aby $X(0) = (x_0, 0, 0)$ a $X'(0) = (v_1, v_2, 0)$ (rozmyslete, že je to možné). Označme $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Pak máme $X'' = -U_0'(|X|)\frac{1}{|X|}X$, což ve třetí souřadnici dává rovnici $z'' = 0$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$.

28) $V(x,y) = 1/2 \ln|y^2 - yx - x^2| - 1/\sqrt{3}\,\mathrm{arctgh}((2y/x - 1)/\sqrt{3})$ je lokálně prvním integrálem (pro $x \neq 0$).

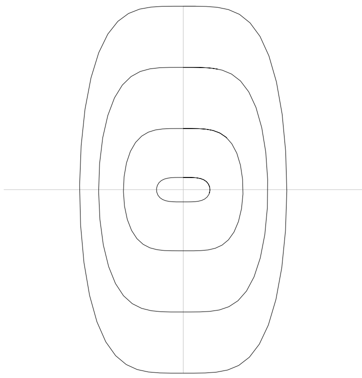
29) $V(x,y) = y^2/2 + x^3/3 - x^2/2$; stacionární body $(0,0)$ a $(1,0)$; symetrie vůči ose $y = 0$; homoklinický orbit (h.o.) $y = \pm x\sqrt{1 - 2x/3}$, $x \in [0, 3/2]$; periodická řešení kolem $(1,0)$ uvnitř h.o., neomezená řešení vně h.o. Perioda řešení s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 \in (0,1)$, $x'(0) = 0$ je

$$2\int_{x_0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x_0^2 - \frac{2}{3}(x^3 - x_0^3)}}dx + 2\int_{1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x_0^2 - \frac{2}{3}(x^3 - x_0^3)}}dx,$$

kde $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} + 3x_0 - 3x_0^2}$.



(a) Úloha 22 (b) Úloha 29



(a) Úloha 23