

Řešte homogenní rovnice (reálné kořeny).

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $8y'' + 2y' - y = 0$
3. $y'' - (2 + \sqrt{2})y' + 2\sqrt{2}y = 0$
4. $y'' + y' - y = 0$
5. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
6. $9y''' - 12y'' + y' + 2y = 0$
7. $y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$
8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
9. $y'' - 2ay' + a^2y = 0, a > 0$
10. $y'' - 64y' + 1024y = 0$
11. $y^{(n)} = 0$
12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
13. $y''' - 9y'' = 0$
14. $y''' - 4y'' + 4y = 0$
15. $4y''' - 4y'' + y = 0$
16. $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$
17. $y^{(5)} - 7y^{(4)} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = 0$
18. $y^{(4)} - 7y'' + 12y = 0$
19. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$
20. $8y^{(4)} - 6y'' + y = 0$

Řešte homogenní úlohy (komplexní kořeny).

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$
22. $y'' + 100y = 0$
23. $y'' + 2y' + 3y = 0$
24. $y'' - y' + y = 0$
25. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
26. $y''' + 2\sqrt{2}y'' + 3y' = 0$
27. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
28. $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$
29. $y'' + 2iy = 0$
30. $y'' - iy' + 2y = 0$
31. $y''' - 3iy'' - y' + 3y = 0$

32. $y'' - 2\sqrt{2}iy'' - 2y = 0$

Najděte řešení s předepsanou počáteční podmínkou.

33. $y'' - 4y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1.$

34. $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4.$

35. $y'' + 4y' + 5 = 0, y(0) = y'(0) = 2.$

36. $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2.$

37. $y'' - 4y' + 7y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

38. $y'' + 2y' + 2 = 0, y(0) = y'(0) = 1.$

39. $y''' - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1.$

40. $y''' + y'' + 25y' + 25 = 0, y(0) = y''(0) = 1, y'(0) = 0.$

41. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 1.$

42. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0, y(0) = y''(0) = 0, y'(0) = 9, y'''(0) = -9.$

43. Najděte všechna řešení rovnice $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$, která jsou omezená (i) pro $t \rightarrow \infty$; (ii) pro $t \rightarrow -\infty$.

44. Najděte všechna řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 0$, která (i) jsou omezená pro $t \rightarrow \infty$; (ii) mají limitu pro $t \rightarrow \infty$; (iii) mají *vlastní* limitu pro $t \rightarrow \infty$.

45. Najděte všechna řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$, která (i) splňují $y(0) = y(1)$; (ii) jsou nenulová v \mathbb{R} .

Řešte následující (teoretičtější) úlohy.

Poznámka. Uvažujeme pouze reálné koeficienty b_k .

46. Necht' funkce $y(x)$ řeší rovnici (2). Potom funkce $y(x - c)$, $y'(x)$ řeší tutéž rovnici.

47. Necht' funkce $y(x)$ řeší rovnici (2); necht' $z(x)$ je měřitelná funkce, splňující

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |z(x)|e^{\lambda|x|} < \infty$$

pro každé $\lambda > 0$; speciálně necht' $z(x)$ je omezená a má omezený nosič. Potom funkce

$$(y * z)(x) = \int_{\mathbb{R}} y(x - s)z(s)ds$$

řeší též rovnici (2).

48. Necht' funkce $x^k e^{\lambda x}$ řeší rovnici (2). Potom funkce $x^j e^{\lambda x}$, $j = 0, \dots, k - 1$ řeší tutéž rovnici.

49. Funkce $\cos \beta x$ řeší rovnici (2), právě když $\sin(\beta x)$ řeší tutéž rovnici.

50. Necht funkce $x^2 + 1 + e^{-x}$ řeší rovnici (2). Jaké další funkce nutně řeší tuto rovnici? Jaký je nejmenší řád této rovnice?
51. Necht funkce $xe^{\alpha x} \cos \beta x$, $\alpha, \beta \neq 0$, řeší rovnici (2). Jaké další funkce nutně řeší tuto rovnici? Jaký je nejmenší řád této rovnice?
52. Uveďte příklad rovnice (co nejmenšího řádu) takové, že $\{\cos^2 x, \cosh x\}$ jsou prvky fundamentálního systému.
53. Uveďte příklad rovnice (co nejmenšího řádu) takové, že $\sin^4 x$ je prvek fundamentálního systému.
54. Ukažte, že $y(x) = 1/(x + 1)$ není řešením žádné rovnice (2).
55. Ukažte, že $y(x) = e^{x^2}$ není řešením žádné rovnice (2).
56. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou omezená v \mathbb{R} . Může být tato rovnice třetího (obecně lichého) řádu?
57. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou sudé funkce.
58. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou liché funkce.