Dodatek - důkaz Lerchovy věty.

Lemma 8. *Nechť $\varphi(x)$ je spojitá v $[0,1]$ a*

$$\int_0^1 \varphi(x)x^m\,dx = 0\,, \qquad \forall m \geq 0 \text{ celé.} \tag{7}$$

Potom $\varphi(x) = 0$.

Jeden z mnoha možných důkazů: Pomocí Weierstrassovy věty naleznu posloupnost polynomů $p_n(x)$ takových, že $p_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ v $[0,1]$. Odtud zřejmě $p_n(x)\varphi(x) \rightrightarrows (\varphi(x))^2$ a tedy

$$\int_0^1 p_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int_0^1 (\varphi(x))^2\,dx\,.$$

Díky (7) je však $\int_0^1 p_n(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pro každé n, tedy pravá strana je 0. Integrál z nezáporné (spojité) funkce je ovšem nula jen tehdy, je-li funkce identicky nulová. □

Věta 9 (Lerch, 1903). *Nechť $f(t) \in L^1_+$; předpokládejme navíc,*[1] *že f je spojitá. Nechť existuje $p_0 \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = 0\,, \qquad \forall p \in [p_0, \infty).$$

Potom $f(t) = 0$.

Důkaz. Stačí dokonce slabší předpoklad

$$\int_0^\infty f(t)e^{-(p_0+n)t}\,dt = 0\,, \qquad \forall n \geq 0 \text{ celé.} \tag{8}$$

Označme

$$b(t) = \int_t^\infty f(s)e^{-p_0 s}\,ds\,.$$

Derivováním podle dolní meze máme

$$b'(t) = -f(t)e^{-p_0 t}\,, \tag{9}$$

tedy $b(t)$ je C^1 v $[0,\infty)$, a díky (8) platí

$$b(0) = 0\,. \tag{10}$$

[1] Čtenář, který zná pojem „absolutní spojitost", se bez tohoto dodatečného předpokladu samozřejmě obejde.

Případným zvětšením p_0 zajistíme, že

$$g(t) = f(t)e^{-(p_0-1)t} \in L^1(0,\infty)\,.$$

Odtud plyne odhad na pokles $b(t)$ v nekonečnu

$$|b(t)| = |\int_t^\infty g(s)e^{-s}\,ds| \le e^{-t}\int_t^\infty g(s)\,ds \le ce^{-t}\,. \tag{11}$$

Integrací per-partes nyní dostáváme

$$\int_0^\infty \underbrace{f(t)e^{-p_0 t}}_{u'}\underbrace{e^{-nt}}_{v}\,dt = \big[-b(t)e^{-nt}\big]_0^\infty - n\int_0^\infty b(t)e^{-nt}\,dt\,.$$

Z (8)–(11) vyplývá

$$\int_0^\infty b(t)e^{-nt}\,dt = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

Substitucí $x = e^{-t}$ obdržíme

$$\int_0^1 \varphi(x)x^{n-1}\,dx = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

$$\varphi(x) = b(-\ln x)\,.$$

Dodefinováním nulou na krajích je $\varphi(x)$ spojitá v $[0,1]$. K ověření spojitosti v 0 zprava užijeme (11):

$$|\varphi(x)| \le c\exp(-(-\ln x)) = cx\,.$$

Podle Lemmatu 1 je $\varphi(x) = 0$, tedy $b(t) = 0$ a odtud podle (9) $f(t) = -b'(t)e^{p_0 t} = 0$. □