Inverzní Laplaceova transformace.

První otázka v souvislosti s inverzí Laplaceovy transformace pochopitelně zní, zda se jedná o prosté zobrazení. Kladná odpověď je obsahem následující tzv. Lerchovy věty, jejíž elementární důkaz lze nalézt v dodatku.

Věta 5 (Lerch)**.** *Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$, a nechť existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(p) = G(p)$ pro každé $p \in (c, \infty)$. Potom $f(t) = g(t)$ skoro všude.*

Za druhé nás zajímá, za jakých okolností je funkce $F(p)$ laplaceovým obrazem nějakého prvku L^1_+. Vhodnou postačující podmínku nám dává další věta.

Věta 6. *Nechť $F(p)$ je holomorfní v množině $\{p \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, p > a\}$ a splňuje zde odhad*

$$|F(p)| \leq \frac{c}{|p|^2}. \tag{2}$$

Potom existuje funkce $f(t) \in L^1_+$ s abscisou konvergence $c_f \leq a$ taková, že $\mathscr{L}\big[f\big](p) = F(p)$ pro všechna $\mathrm{Re}\, p > a$. Funkci $f(t)$ lze vyjádřit integrálem

$$f(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} F(z) e^{tz} dz, \qquad t > 0, \tag{3}$$

kde $b > a$ je libovolné.

Poznámka. Vzorec (3) se nazývá Bromwichův nebo též Fourier-Mellinův integrál. Je zde míněn křivkový integrál v $\mathbb{C}$ podél křivky $\phi(s) = b + is$, $s \in [-R, R]$.

Za dodatečných předpokladů na funkci $F(p)$ lze integrál v (3) vypočíst pomocí reziduové věty. Zformulujme to opět jako větu.

Věta 7. *Nechť $F(p)$ je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, a nechť platí odhad* (2) *pro $|p| \to \infty$. Potom existuje $f(t) \in L^1_+$ taková, že $\mathscr{L}\big[f\big](p) = F(p)$ pro $\mathrm{Re}\, p > \max\{\mathrm{Re}\, z_1, \dots, \mathrm{Re}\, z_n\}$, a platí*

$$f(t) = \sum_k \mathrm{res}_{z=z_k} F(z) e^{tz}, \qquad t > 0. \tag{4}$$

Poznámka. Předpokládáme-li dokonce, že $F(p)$ je racionální funkce, lze požadavek (2) v přechozích větách nahradit slabším předpokladem

$$|F(p)| \leq \frac{c}{|p|}. \tag{5}$$

To odpovídá situaci, kdy $F(p)$ je podíl polynomů, a čitatel má menší stupeň než jmenovatel, s čímž vystačíme v naprosté většině případů.

Závěrečná diskuse

Jak se lze přesvědčit o tom, že řešení získané ,,formální" aplikací Laplaceovy transformace je opravdu řešením původní rovnice?

- Předpokládejme, že je nám z teorie známo, že studovaná rovnice *má* řešení ve třídě funkcí L^1_+. (To je pravda kupříkladu pro lineární rovnice s konstantními koeficienty.) Pak toto řešení musí splňovat transformovanou rovnici. Díky Větě 5 je příslušný Laplaceův vzor (získaný ať z tabulek, ať pomocí Vět 6, 7) nutně roven řešení naší rovnice.

- O správnosti nalezeného řešení se lze v každém případě přesvědčit jednoduše dosazením. (Zcela bezpečný, ovšem v praxi někdy hodně pracný způsob.)

- Důmyslnější způsob jak provést ,,zkoušku" si předvedeme na jednoduché rovnici

  $$x'(t) + \int_0^t e^s x(t-s) = 1, \qquad x(0) = 1.$$

  Aplikujme nejprve ,,formálně" Laplaceovu transformaci. Máme

  $$pX(p) + \frac{1}{p-1}X(p) = \frac{1}{p} - 1.$$

  Odsud

  $$X(p) = \frac{p^2-1}{p^3-p^2+p} = \frac{2p-1}{p^2-p+1} - \frac{1}{p}. \tag{6}$$

  Nyní nalezneme funkci

  $$\tilde{x}(t) = 2e^{2t}\cos\sqrt{3}t/2 - 1,$$

  což je (jediná) funkce splňující $\mathscr{L}\big[\tilde{x}\big] = X(p)$. Ovšem $\tilde{x} \in L^1_+ \cap C^\infty$, a tedy můžeme počítat

  $$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big[\tilde{x}'(t) + \int_0^t e^s \tilde{x}(t-s)ds\Big] &= p\tilde{X}(p) + \frac{1}{p-1}\tilde{X}(p) - \tilde{x}(0)\\ &= -\left(\frac{1}{p} - 1\right) - \tilde{x}(0)\\ &= \frac{1}{p}\\ &= \mathscr{L}\big[1\big].\end{aligned}$$

Ve druhém řádku jsme užili fakt, že $\tilde{X}(p)$ vyhovuje rovnici (6). Z Věty 5 však plyne, že

$$\tilde{x}'(t) + \int_0^t e^s \tilde{x}(t-s)ds = 1$$

skoro všude; díky hladkosti $\tilde{x}$ nastává rovnost pro všechna $t \geq 0$. Z přechozích úvah navíc vyplývá, že $\tilde{x}$ je *jediné* řešení ve třídě L^1_+.