Laplaceova transformace

Definice 1. Označme

$$L^1_+ := \left\{ f(t) : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ měřitelná, a } \exists c \in \mathbb{R} \text{ tak, že } \int_0^\infty |f(t)| e^{-ct}\, dt < \infty \right\}.$$

Funkce z L^1_+ jsou lokálně integrovatelné. Bývá zvykem dodefinovat je nulou pro $t \leq 0$. Pro $f \in L^1_+$ definujeme *abscisu konvergence* jako

$$c_f := \inf \left\{ c \in \mathbb{R};\ \int_0^\infty |f(t)| e^{-ct} < \infty \right\}.$$

Patrně $|f(t)|e^{-ct}$ je integrovatelná funkce pro každé $c > c_f$. Lehce si rozmyslíme, že L^1_+ je vektorový prostor a platí $c_{f+g} \leq \max\{c_f, c_g\}$.

Definice 2. Pro $f(t) \in L^1_+$, definujeme Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$ jakožto

$$\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) := \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \qquad \operatorname{Re} p > c_f.$$

Je zvykem značit $\mathscr{L}\big[f\big] = F$. Zdůrazněme, Laplaceova transformace je operátor, který funkci $f = f(t)$ reálné proměnné t přiřazuje funkci $F = F(p)$ komplexní proměnné p.

Zjevně $f \mapsto \mathscr{L}\big[f\big]$ je lineární operátor v následujícím smyslu: pokud f, $g \in L^1_+$, je

$$\mathscr{L}\big[f+g\big](p) = \mathscr{L}\big[f\big](p) + \mathscr{L}\big[g\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}.$$

Další základní vlastnosti jsou shrnuty v následující větě.

Věta 1. *Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom:*

1. *Pro $a > 0$ je $f(at) \in L^1_+$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[f(at)\big](p) = a^{-1} \mathscr{L}\big[f(t)\big](a^{-1}p), \qquad \operatorname{Re} p > a c_f.$$

2. *Pro $a \in \mathbb{R}$ je $e^{at} f(t) \in L^1_+$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[e^{at} f(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p-a), \qquad \operatorname{Re} p > a + c_f.$$

3. *$F(p) = \mathscr{L}\big[f\big](p)$ je holomorfní v množině $\{\operatorname{Re} p > c_f\}$ a platí*

$$F'(p) = \mathscr{L}\big[(-t) f(t)\big](p);$$

obecněji

$$F^{(k)}(p) = \mathscr{L}\big[(-t)^k f(t)\big](p).$$

4. $F(p) \to 0$ *pro* $\operatorname{Re} p \to \infty$, $\operatorname{Im} p$ *pevné a také pro* $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p$ *pevné.*

Při aplikaci Laplaceovy transformace je důležité znát obrazy elementárních funkcí. Existují rozsáhlé tabulky jak v knižní, tak elektronické podobě. Nejdůležitější základní vzorečky shrnuje následující věta.

Věta 2. *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Funkce* e^{at}, t^n, $\sin at$ *a* $\cos at$ *jsou prvkem* L^1_+ *a platí:*

1.

$$\mathscr{L}\big[e^{at}\big](p) = \frac{1}{p-a}, \qquad \operatorname{Re} p > a.$$

Speciálně $\mathscr{L}\big[1\big](p) = p^{-1}$.

2.

$$\mathscr{L}\big[t^n\big](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0;$$

obecněji pro každé $\alpha > -1$

$$\mathscr{L}\big[t^\alpha\big](p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

3.

$$\mathscr{L}\big[\sin at\big](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

4.

$$\mathscr{L}\big[\cos at\big](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$