Kvalitativní analýza diferenciálních rovnic

Uvažujme diferenciální rovnici

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

kde $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce proměnné t a f je spojitá funkce, $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$. V této kapitole se budeme snažit zjistit o řešení konkrétní rovnice tohoto typu co nejvíce informací, aniž bychom tuto rovnici řešili, tj. aniž bychom hledali explicitní vyjádření řešení.

Shrňme si základní poznatky:

- Je-li f spojitá na okolí bodu (t_0, x_0), prochází tímto bodem nějaké řešení. (Peanova věta)
- Je-li f lipschitzovská v proměnné x na okolí bodu (t_0, x_0), prochází tímto bodem právě jedno řešení. (Picardova věta) Speciálně, je-li $\partial f/\partial x$ spojitá v bodě (t_0, x_0), prochází tímto bodem právě jedno řešení.
- Je-li $f(t, x) > 0$ (resp. < 0), je řešení procházející bodem (t, x) v tomto bodě rostoucí (resp. klesající). (Protože $x'(t) = f(t, x)$.)

Dále, je-li $f \in C^1(M)$, je pro řešení x pravá strana rovnice (1) spojitě diferencovatelná, tedy x je třídy C^2 na svém definičním oboru. Je tedy možné vyšetřovat konvexitu pomocí druhé derivace:

$$x''(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) x'(t) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)\right] f(t, x).$$

- Pokud na okolí bodu (t, x) je f třídy C^1 a platí

  $$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) f(t, x) > 0$$

  (resp. < 0), je řešení procházející bodem (t, x) na okolí tohoto bodu konvexní (resp. konkávní).

Příklad 1. Vyšetřete monotonii a konvexitu řešení rovnice $x' = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

Řešení. Zřejmě každým bodem pásů $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(-1,1)$, $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ prochází právě jedno řešení. Body přímek $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ sice prochází nějaká řešení, ale Picardova věta nám nedává jednoznačnost ($\partial f/\partial x(t,\pm 1)=\pm\infty$) a níže se ukáže, že skutečně těmito body prochází mnoho různých řešení.

Znaménko funkce f nám dává: x je rostoucí v pásu $\mathbb{R}\times(-1,1)$ a klesající na $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$ a $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$. Pro $f=0$ dostáváme stacionární řešení $x=\pm 1$. Pro zjištění druhé derivace spočítáme

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)f(t,x)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}(-2x).$$

Tedy x je konvexní na $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ a $\mathbb{R}\times\{-1,0\}$ a konkávní na $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(0,1)$, na přímce $\mathbb{R}\times\{0\}$ leží inflexní body.

Další důležitou vlastností řešení je jeho definiční obor. V předchozím příkladu jsme nezodpověděli otázku, zda řešení v pásu $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$ zůstanou stále v tomto pásu, nebo se napojí v konečném čase na stacionární řešení ± 1. [1] To, že definičním oborem těchto řešení bude $\mathbb{R}$, plyne ihned z věty o opuštění kompaktu (vezmeme-li za onu kompaktní množinu $[-1,1]\times[-K,K]$, plyne z předchozího, že tato množina nemůže být opuštěna vrchem ani spodem, řešení tedy bude definováno na větším intervalu než $[-K,K]$). Naopak u maximálních řešení v pásech $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ není zřejmé, zda budou definována na celém $\mathbb{R}$, nebo utečou do nekonečna v konečném čase (tj. nastane "blow up"). Z věty o opuštění kompaktu plyne, že musí nastat jedna z těchto dvou situací. Tyto jevy prozkoumáme v následující části o autonomních rovnicích.

Autonomní rovnice a Barrowův vzorec

V této části se budeme zabývat autonomními rovnicemi, tj.

$$x'=f(x). \tag{2}$$

Pro tyto rovnice jsou typické některé vlastnosti, které se objevily v předchozím příkladu.

- Je-li $t\mapsto x(t)$, $t\in(a,b)$ řešení, pak $t\mapsto x(t+c)$, $t\in(a-c,b-c)$ je také řešení.
- Je-li $f(x_0)=0$, je $x(t)=x_0$ stacionární řešení (definované na celém $\mathbb{R}$).

[1] Stacionární řešení pak už neopustí. Situace$x(t_0)=1$ a $x(t_0+\delta)>1$ nemůže nastat, protože řešení klesající pokud $x(t)>1$, $t(t_0+\delta-\varepsilon)>x(t_0+\delta)$ for all $\varepsilon>0$. Z podobného důvodu nemůže řešení opustit přímku $x=1$ směrem dolů.

- Každé řešení autonomní rovnice je monotónní. (důkaz viz cvičení)
- Je-li $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = x_1$ vlastní, pak $f(x_1) = 0$. (důkaz viz cvičení)

Při zkoumání definičního oboru řešení se nám bude hodit Barrowův vzorec:

Věta 1 (Barrowův vzorec)**.** *Nechť x je řešením rovnice (2) na intervalu $I = (t_0, t_1)$, f je spojitá a $f(x(t)) \neq 0$ na I. Označme $a := \lim_{t\to t_0+} x(t)$ a $b := \lim_{t\to t_1-} x(t)$. Potom*

$$t_1 - t_0 = \int_a^b \frac{1}{f(z)} dz. \tag{3}$$

Důkaz. Viz cvičení. □

Barrowův vzorec udává čas, který potřebuje řešení k tomu, aby vystoupalo (resp. zklesalo) z hodnoty a do hodnoty b (zamyslete se nad vzorcem (3)). Speciálně pak Barrowův vzorec říká následující:

- Řešení konvergující k b zleva (resp. zprava) pro $t \to T$ (T je krajní bod intervalu, na kterém je řešení definováno) se napojí v konečném čase na stacionární řešení $x = b$, právě když (pro malé δ)

  $$\int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{f(z)} dz \quad \left(\text{resp. } \int_{b}^{b-\delta} \frac{1}{f(z)} dz\right)$$

  konverguje.
- Řešení, jehož limita je $+\infty$ (resp. $-\infty$) má zprava (resp. zleva) neomezený definiční obor, právě když (pro velké K)

  $$\int_{K}^{+\infty} \frac{1}{f(z)} dz \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{K} \frac{1}{f(z)} dz\right)$$

  diverguje. Tj. "blow up"nastane, právě když integrál konverguje.

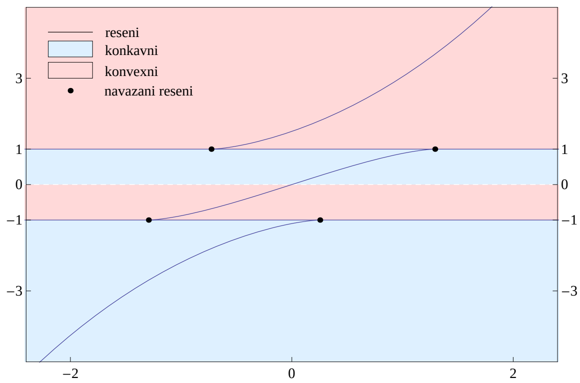
Příklad 2. Zjistěte, zda některými body roviny probíhá více než jedno řešení rovnice $x' = \sqrt[3]{1-x^2}$ a zda u některých řešení nastane "blow up".

Řešení. Protože integrál

$$\int (1-x)^{-1/3}(1+x)^{-1/3} dx \tag{4}$$

konverguje u bodů ± 1 zprava i zleva, napojí se všechna řešení konvergující k ± 1 na stacionární řešení v konečném čase a tedy body $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ prochází nekonečně mnoho maximálních řešení.

Protože integrál (4) diverguje u $\pm\infty$, nenastane pro řešení v pásech $\mathbb{R} \times (-\infty, -1)$, $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$ "blow up".



Příklad 3. Vyšetřete průběh řešení rovnice $\sqrt{x+1}x' = e^x - 1$.

Řešení. Protože $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitě diferencovatelná na $(-1, +\infty)$, prochází každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (-1, +\infty)$ právě jedno řešení. Znaménko funkce f nám dává stacionární řešení $x \equiv 0$ a dále:

Pro $x \in (-1, 0)$ máme klesající řešení, která mají v $-\infty$ limitu 0 a na nulu se nenapojí (z jednoznačnosti řešení), zatímco do -1 dojdou v konečném čase $t = b$ ($\int_{-1}^{-1/2} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x - 1} dx$ konverguje) a

$$\lim_{t \to b-} x'(t) = \lim_{t \to b-} \frac{e^{x(t)} - 1}{\sqrt{x(t) + 1}} = -\infty.$$

Pro $x \in (0, +\infty)$ je řešení rostoucí, v $-\infty$ má limitu 0 a nenapojí se na stacionární řešení. Protože

$$\int_K^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} dx$$

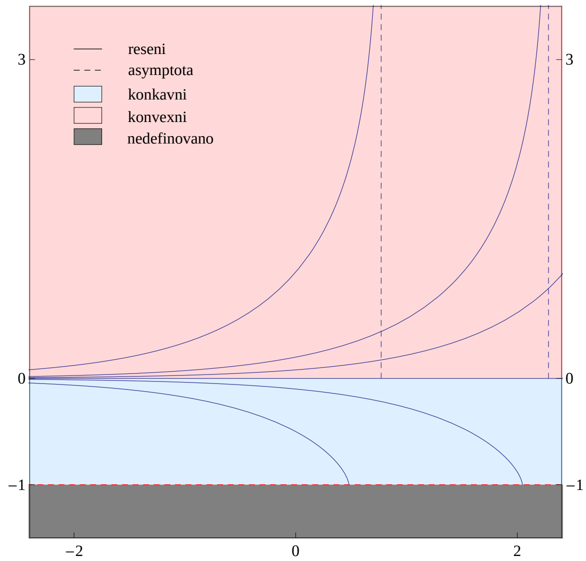
konverguje, nastane "blow up".

Vypočteme druhou derivaci:

$$x''(t) = \frac{e^x \sqrt{x+1} - (e^x - 1)\frac{1}{2}\sqrt{x+1}^{-1}}{x+1} \cdot \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1}} =$$

$$\frac{e^x - 1}{(x+1)^2} \left(e^x \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right)$$

Protože funkce $e^x(x+1/2)+1/2$ je kladná na $(-1,+\infty)$ (například zderivováním zjistíme, že tato funkce nabývá minima v bodě $x=-3/2$), jsou řešení na $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ konvexní a řešení na $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ konkávní.



Úlohy

Vyšetřete průběh řešení následujících diferenciálních rovnic:

1. $x' = \frac{1}{x}(x+1)(x+2)$

2. $x' = e^x - 1$

3. $x' = x\ln(x+3)$

4. $x' = \frac{(x-1)\sqrt[3]{x+4}}{(x+1)\ln(x^2+1)}$

5. $x' = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+7/4}}$

6. $xx' = (x^2-1)\operatorname{arctg} x$

7. $x^2\ln x x' = (x^3-1)\sin(\sin x)$

8. $(\ln x+1)x' = (x-1)(e^x-e)$

9. $(x-2)x' = (x+1)\sqrt{x+1}(x+|x|-2)$

10. Pokud je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lichá a $t\mapsto x(t)$ je řešením rovnice (2), pak $t\mapsto -x(t)$ je také řešením rovnice (2). Je-li funkce f sudá a $t\mapsto x(t)$ je řešením rovnice (2), pak $t\mapsto -x(-t)$ je také řešením rovnice (2).

11. Uvažujme řešení rovnice $x' = (x+1)(x+2)$, které v čase $t=0$ nabývá hodnoty 1. Před jakou dobou nabývalo hodnoty 0? Za jak dlouho nastane blow up?

12. Kolik času potřebuje řešení rovnice $x' = x\sqrt{2-x}$ k vystoupání z hodnoty 0 k hodnotě 2?

Teoretičtější úlohy

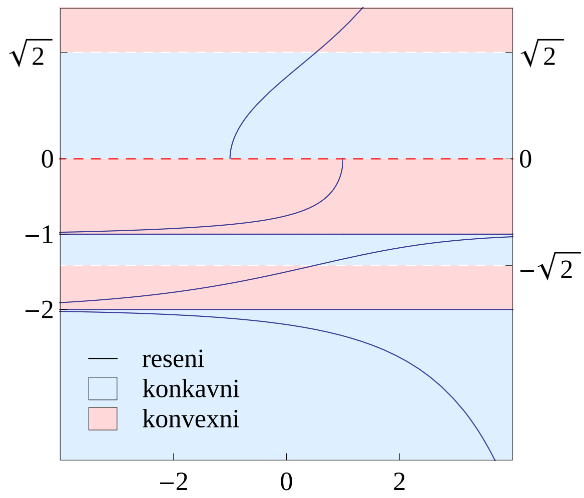
13. Ukažte, že každé řešení autonomní rovnice je monotónní.

14. Ukažte, že má-li řešení x rovnice (2) v $+\infty$ vlastní limitu rovnou x_1 a je-li f spojitá v x_1, pak $f(x_1) = 0$.

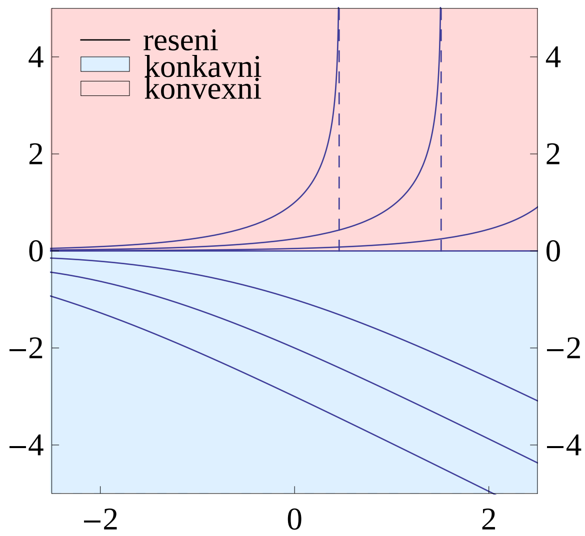
15. Dokažte Barrowův vzorec.

Řešení

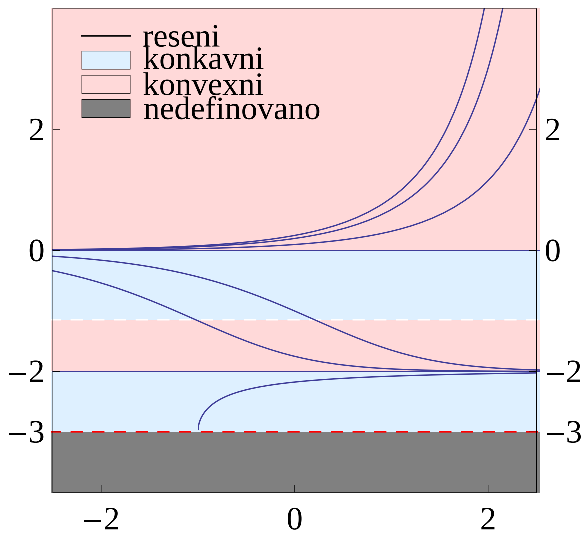
1) Stacionární řešení $x = -1$, $x = -2$, body $\mathbb{R} \times \{0\}$ neprochází žádné řešení. Na stacionární řešení se nic nenapojí, blow-up nenastane. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$ a $(-2, -1)$, klesající pro $x \in (-1, 0)$ a $(-\infty, -2)$. Konvetní jsou na $(-2, -\sqrt{2})$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, +\infty)$ a konkávní na mezilehlých intervalech. Na přímkách $x = \pm\sqrt{2}$ leží inflexní body. Pro $x \to 0$ se x' blizi k $\pm\infty$.



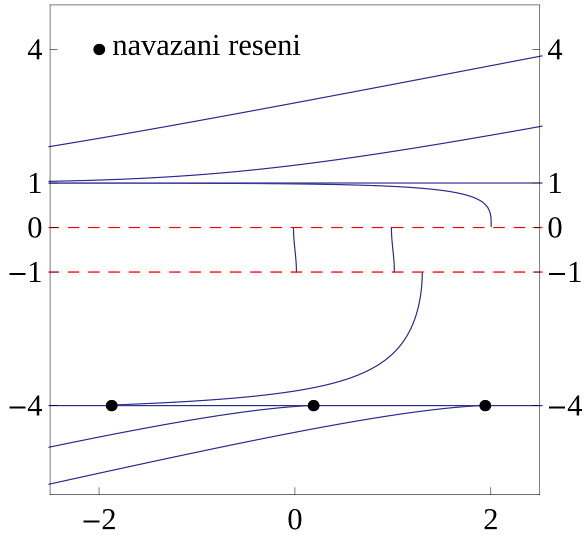
2) Stacionární řešení $x = 0$, nic se na něj nenapojí, blow-up nastane v $+\infty$, v $-\infty$ nikoli. Řešení jsou rostoucí a konvexní pro $x \in (0, +\infty)$, klesající a konkávní pro $x \in (-\infty, 0)$.



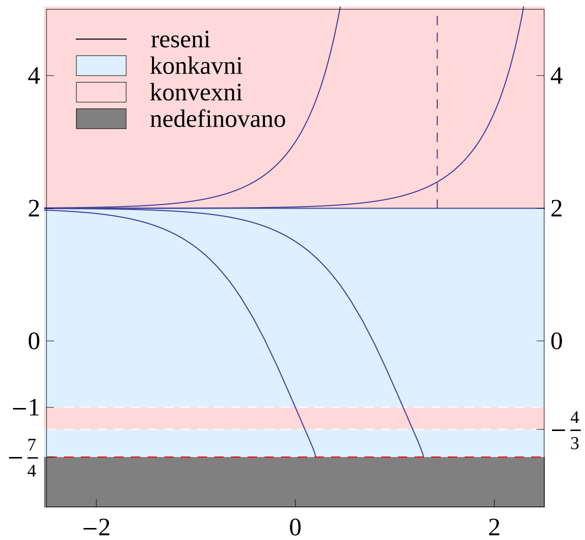
3) Každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (-3, +\infty)$ prochází právě jedno řešení. Stacionární řešení $x = 0$, $x = -2$, nic se na ně nenapojí (z jednoznačnosti). Blow-up v $+\infty$ nenastane. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$ a $(-3, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$. Pro $x \in (-3, -2)$ jsou konkávní, pro $x \in (0, +\infty)$ konvexní. V intervalu $(-2, 0)$ etistuje právě jeden bod x_0, kde se nabývá inflete. Řešení je konvexní pro $x \in (-2, x_0)$ a konkávní pro $x \in (x_0, 0)$. Pro $x \to -3$ zprava se x' blizi k $+\infty$.



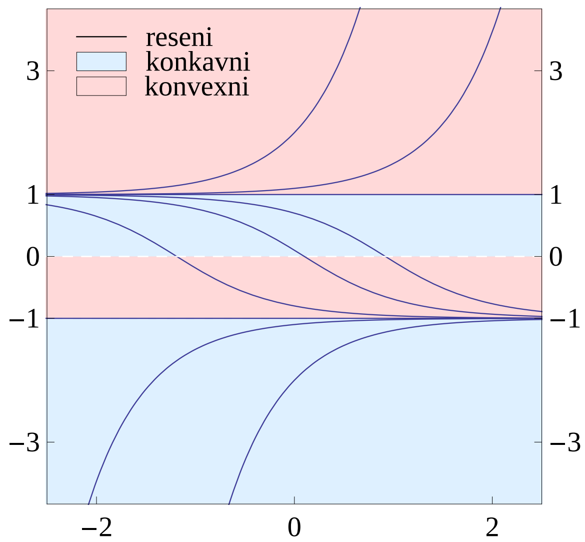
4) Stacionární řešení $x \equiv 1$, $x \equiv -4$. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (1, +\infty)$ definovaná na $\mathbb{R}$ a $(-4, -1)$ definovaná na omezeném intervalu s nulovou derivací u -4 a nekonečnou u 0. Řešení jsou klesající pro $x \in (0, 1)$ definovaná na $(-\infty, T)$ s derivací $-\infty$ u 0, dále pro $x \in (-1, 0)$ definovaná na (T_1, T_2) s derivací $-\infty$ u 0 a -1 a pro $x \in (-\infty, -4)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nulovou derivací u -4. Řešení v pásech $(-\infty, -4)$ a $(-4, -1)$ se hladce napojují na stacionární řešení $x \equiv -4$.



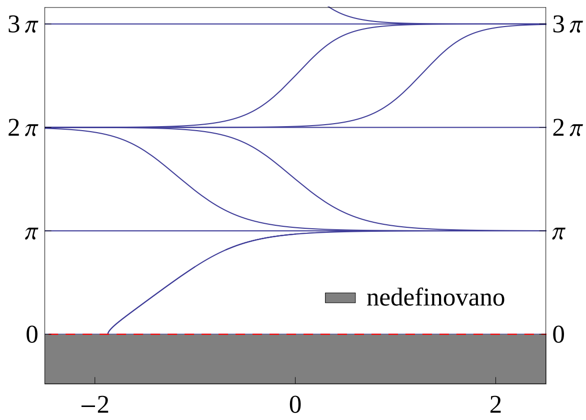
5) Stacionární řešení $x \equiv 2$. Rostoucí řešení v pásu $x \in (2, +\infty)$ definovaná na $(-\infty, T)$, konvexní. Klesající řešení v pásu $x \in (-7/4, 2)$ definovaná na $(-\infty, T)$, konkávní pro $x \in (-1, 2)$, $(-7/4, -4/3)$, konvexní pro $x \in (-4/3, -1)$. Pro $x \to -7/4$ máme $x' \to -\infty$.



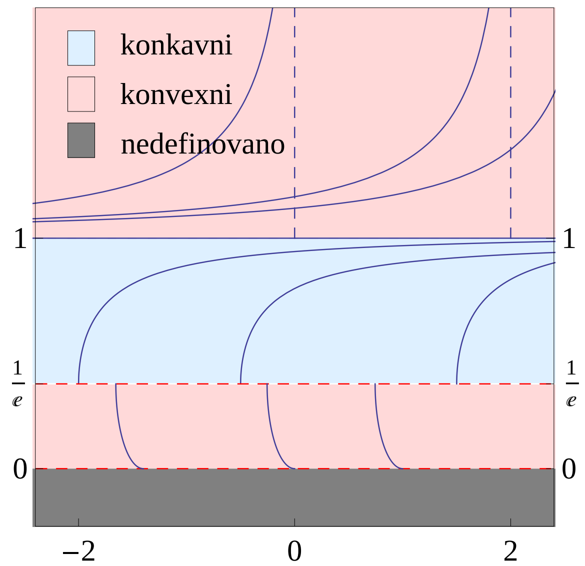
6) Stacionární řešení $x \equiv \pm 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Klesající řešení v pásu $x \in (-1, 1)$ definovaná na $\mathbb{R}$ (v nule lze dodefinovat, má řešení derivaci -1).



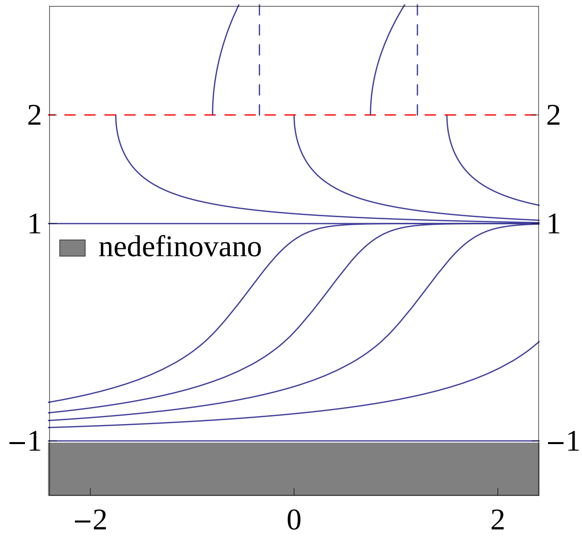
7) Stacionární řešení $x \equiv 1$ a $x \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi)$ definovaná na $\mathbb{R}$, kromě pásu $(0, \pi)$, kde jsou definována jen na $(T, +\infty)$, $x'(t) \to +\infty$ pro $t \to T+$ (pro $x = 1$ lze dodefinovat). Klesající řešení v pásech $x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi)$ definovaná na $\mathbb{R}$.



8) Stacionární řešení $x \equiv 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (1, +\infty)$ definovaná na $(-\infty, T)$ a $x \in (1/e, 1)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nekonečnou derivací u $1/e$. Klesající řešení v pásu $x \in (0, 1/e)$ definovaná na (T_1, T_2) s nekonečnou derivací u $1/e$.



9) Stacionární řešení $x \equiv \pm 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (2, +\infty)$ definovaná na $(-T_1, T_2)$ s nekonečnou derivací u 2 a $x \in (-1, 1)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Klesající řešení v pásu $x \in (1, 2)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nekonečnou derivací u 2.



10) a) f lichá, potom $\frac{d}{dt}(-x(t)) = -x'(t) = -f(x(t)) \overset{lichost}{=} f(-x(t))$
b) f sudá, potom věta o derivaci složené funkce říká: $\frac{d}{dt}(-x(-t)) = x'(-t) = f(x(-t))$

11) Hodnoty 0 nabývalo v čase $\ln(3/4)$, blow up nastane za $\ln(3/2)$.

12) Z hodnoty 0 se funkce nikdy nedostane (z jednoznačnosti řešení).

13) sporem: nechť řešení x není monotónní na (T_1, T_2), tj. BÚNO existují

$a < b < c$ taková, že $x(c) < x(a) < x(b)$. Ukažte, že existuje $r \in (a,b)$, že $x'(r) > 0$. Ukažte, že existuje $t \in (b,c)$, že $x(t) = x(r)$. Uvažujte $t_0 := \inf t > r : \ x(t) = x(r)$. Ukažte, že $t_0 > r$, $x(t_0) = x(r)$ a $x'(t_0) = x'(r) > 0$. Odtud plyne existence $s \in (r, t_0)$ spňujícího $x(s) = x(r)$, což je spor.

14) Nechť $\exists \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_1$, ze spojitosti f v bodě x_1 existuje $h > 0$; $|f(x)| \le K$ na $[x_1-\delta, x_1+\delta]$ a platí $\lim_{t\to+\infty} x(t+h) = x_1 = \lim_{t\to+\infty} x(t)$. Pišme tedy

$$0 = x_1 - x_1 = \lim_{t\to\infty} x(t+h) - x(t) = \lim_{t\to\infty} x_0 + \int\limits_0^{t+h} f(x(s)ds - x_0 - \int\limits_0^{t} f(x(s))ds =$$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+h} f(x(s))ds \overset{s=y+t}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{h} f(x(y+t))dy = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{h} f(x(y+t))dy \overset{Lebesgue}{=}$$

$$\int_0^h \lim_{t\to\infty} f(x(y+t))dy \overset{VOLSF}{=} \int\limits_0^h f(x_1)dy = hf(x_1)$$

Tedy $f(x_1) = 0$.

15) Označme $I = (t_0, t_1)$ $a := \lim_{t\to t_0+} x(t)$, $b := \lim_{t\to t_1-} x(t)$, dále předpokládejme, že $f(x(t)) \neq 0$ na I, BÚNO $f(x(t)) > 0$ na I. $x(t)$ je rostoucí na I a vzájmeně jednoznačně zobrazí I na $J = (a,b)$. Označme $g(y) : J \to I$ inverzi k $x(t)$. Derivaci $g(y)$ spočteme pomocí věty o derivování inverzní funkce

$$g'(y) = \frac{1}{x'(g(y))} = \frac{1}{f(x(g(y)))} = \frac{1}{f(y)}.$$

Nyní stačí integrovat přes interval (α, β), kde $a < \alpha < \beta < b$

$$g(\beta) - g(\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(y)} dy.$$

K dokončení důkazu stačí udělat limitní přechod. Pro limitní přechod v intergrálu se použije Leviho věta.

Neautonomní rovnice

Pro neautonomní rovnice je situace složitější v tom, že při zjišťování monotonie a konvexity musíme dávat pozor na hodnoty t a výsledné oblasti tedy už nebudou pásy v rovině, ale složitější množiny.

Příklad 4. Vyšetřete průběh řešení rovnice $x' = tx(x-2)$.

Řešení. Každým bodem roviny prochází právě jedno řešení. Protože funkce f je lichá v proměnné t, musí být řešení sudé funkce (viz. cvičení níže). Máme 2 stacionární řešení $x \equiv 0$, $x \equiv 2$. Znaménko funkce $f(t,x) = tx(x-2)$ nám dává monotonii. Řešení jsou rostoucí na množinách $\mathbb{R}_+ \times (2,+\infty)$, $\mathbb{R}_+ \times (-\infty,0)$ a $\mathbb{R}_- \times (0,2)$ a klesající na $\mathbb{R}_- \times (2,+\infty)$, $\mathbb{R}_- \times (-\infty,0)$ a $\mathbb{R}_+ \times (0,2)$. Vypočteme druhou derivaci

$$x''(t) = x(x-2) + (t(x-2)+tx)tx(x-2) = x(x-2)(1+2t^2(x-1)),$$

která nám dává křivku infletních bodů

$$x = 1 - \frac{1}{2t^2}.$$

Pro $x \in (2,+\infty)$ jsou tedy řešení konvexní. V pásu $\mathbb{R} \times (0,2)$ je zřejmé, že řešení x mají vlastní limitu v $\pm\infty$. Kdyby to nebyla 0, bylo by

$$\lim_{t\to\pm\infty} x'(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t \cdot \lim_{t\to\pm\infty} x(t)(x(t)-2) = \mp\infty,$$

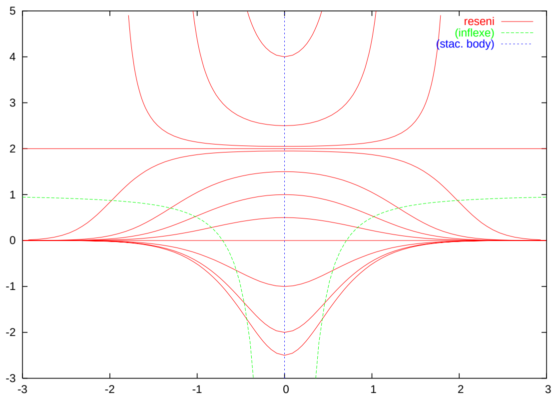
což je nemožné. Tedy v pásu $\mathbb{R} \times (0,2)$ jsou řešení nejprve rostoucí konvexní, pak protnou křivku infletních bodů, stanou se konkávními, v bodě $t = 0$ dosáhnou svého maxima a začnou klesat, opět protnou křivku inflexních bodů, stanou se opět konvexními a pomalu klesají k 0.

V pásu $\mathbb{R} \times (-\infty,0)$ řešení pro hodně záporná t klesají od 0 a dále mají dvě možnosti. Buď rychle utečou do $-\infty$, aniž by protla křivku inflexních bodů. Nebo tuto křivku protnou a tím se stanou konvexními, doklesají do $t = 0$, tam začnou opět růst, po čase se opět stanou konkávními a rostou k 0 pro $t \to +\infty$. Otázkou je, zda existují řešení prvního typu (řešení druhého typu existovat musí, protože body mezi levou a pravou křivkou inflexních bodů musí procházet nějaké řešení).

Tím jsme se dostali k poslední otázce, a to zda nastane či nenastane blow-up (v obou nekonečnech). Použijeme analogii Barrowova vzorce. Řešíme-li rovnici metodou separovaných proměnných, dostaneme rovnost

$$G(x) = t^2 + c, \quad G(x) = \int \frac{1}{x(x-2)}dx.$$

Protože pro kladná řešení jsou konvexní a musí tedy nutně růst k nekonečnu, plyne z konvergence integrálu, že nastane blow-up (pro $x \to +\infty$ se t blíží ke konečnému číslu). Zda etistují řešení, která se blíží k $-\infty$ však nevíme. !!!



Úlohy

Vyšetřete průběh řešení následujících diferenciálních rovnic:

16. $x' = t^2(x+1)$

17. $x' = \frac{x-1}{t-1}$

18. $x' = t(x+1)$

19. $x' = \frac{x}{t} + t^2$

20. $x' = 2tx - 2$

21. $x' = t^2 + x^2 - 1$

22. $x' = t + x - tx$

23. $x' = \ln t + \ln x$

24. Pokud je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lichá v proměnné t, je každé řešení rovnice (1) sudé.

25. Řešení rovnice $x' = tx^3$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. Kolik času potřebuje k tomu, aby dosáhlo hodnoty 5?

26. Řešení rovnice $x' = (t+1)(x+1)$ má v čase $t = 0$ hodnotu $x(0) = 1$. Kolik času potřebuje k tomu, aby dosáhlo hodnoty $2e - 1$?

27. Řešení rovnice $x' = t\ln(x)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. Kolik času potřebuje k tomu, aby dosáhlo hodnoty 2?

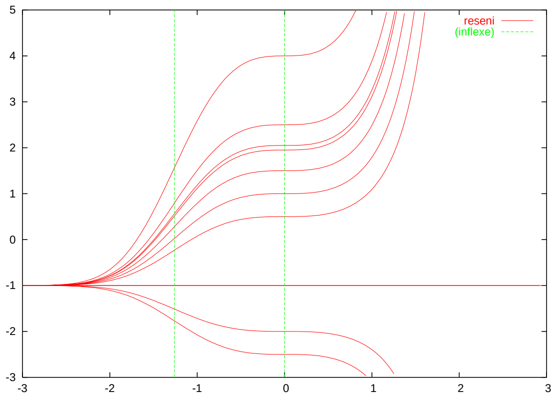
28. Řešení rovnice $x' = \frac{x+1}{t+1}$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Kolik času potřebuje k tomu, aby dosáhlo hodnoty 4?

29. Řešení rovnice $x' = (t+4)x^2$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. Za jak dlouho nastane blow-up?

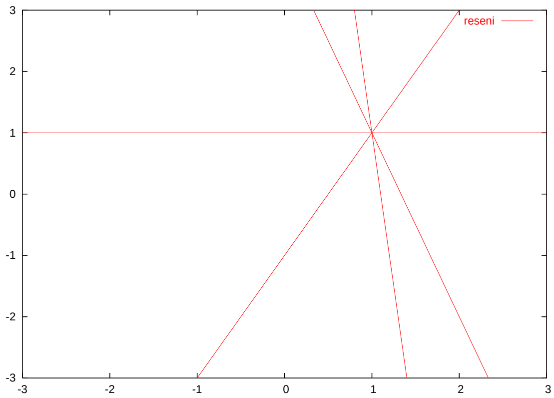
30. Řešení rovnice $x' = \frac{t^2+5}{x+1}$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Za jak dlouho nastane blow-up?

Řešení

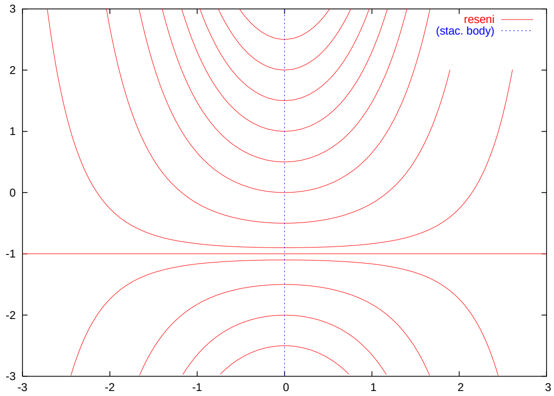
16) Stacionární řešení: $x \equiv -1$, v $t = 0$ x' nemění znaménko - nejsou lokální extrémy. V polorovině $x < -1$ řešení klesá, v polorivně $x > -1$ řešení roste. Inflexní body leží na grafu funkce $x = t(\sqrt[3]{2} + t\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(t^2 + t)(x+1)$. Pro $x > -1$: $t < -\sqrt[3]{2}$ konvexní, $t \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$ konkávní, $t > 0$ konvexní. Pro $x < -1$: $t < -\sqrt[3]{2}$ konkávní, $t \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$ konvexní, $t > 0$ konkávní.



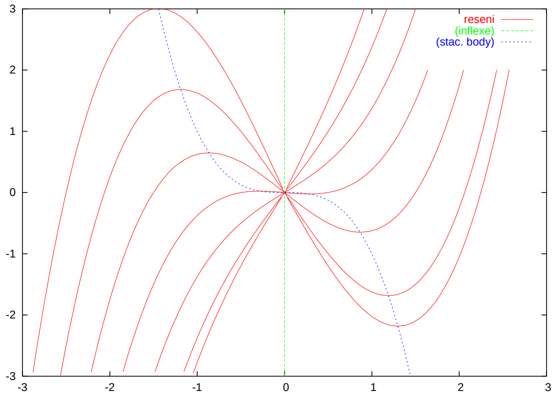
17) Stacionární řešení: $x \equiv 1$, v čase $t = 1$ nejsou řešení definována. $x'' = 0$ - řešením jsou části přímek. Závěr: řešením je svazek polopřímek procházející bodem $[1, 1]$.



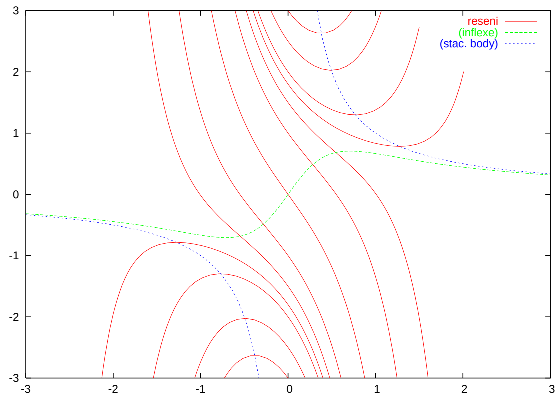
18) Stacionární řešení: $x \equiv -1$ v $t = 0$ x' mění znaménko - lokální extrémy. Pro $x > -1$: $t < 0$ řešení klesají, $t > 0$ řešení rostou; pro $x < -1$: $t < 0$ řešení rostou, $t > 0$ řešení klesají. $x'' = t^2(x+1)$, pro $x > -1$ je řešení konvexní, pro $x < -1$ je řešení konkávní.



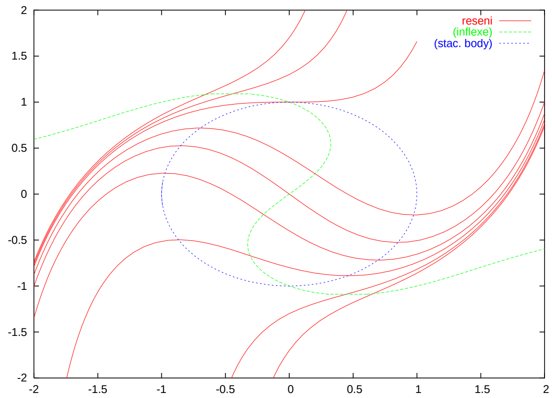
19) Řešení není definované pro $t = 0$. $x' = 0$ na grafu funkce $x = -t^3$ - lokální extrémy. Pro $t < 0$: $x < -t^3$ řešení roste; $x < -t^3$ řešení klesá. Pro $t > 0$: $x < -t^3$ řešení klesá; $x > -t^3$ řešení roste. Inflexní bod v počátku. Pro $t < 0$ je řešení konkávní, pro $t > 0$ je řešení konvexní.



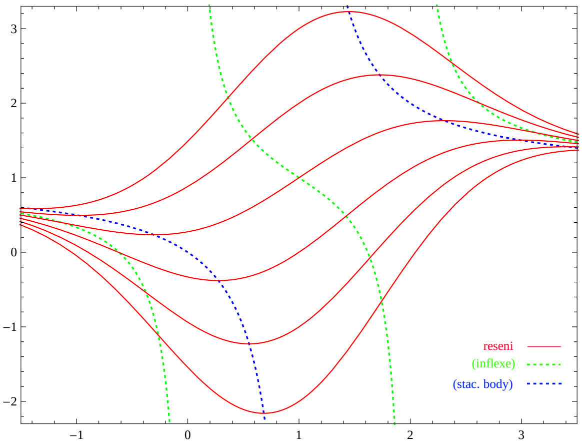
20) Lokální extémy leží na grafu funkce $\frac{1}{t}$. Pro $x < \frac{1}{t} < 0$ a $x > \frac{1}{t} > 0$ jsou řešení rostoucí, v oblasti "mezi"vetvěmi hyperboly jsou řešení klesající. Inflexní body leží na grafu funkce $x = \frac{2t}{1+2t^2}$. Pro $x < \frac{2t}{1+2t^2}$ jsou řešení konkávní, pro $x > \frac{2t}{1+2t^2}$ jsou řešení konvexní.



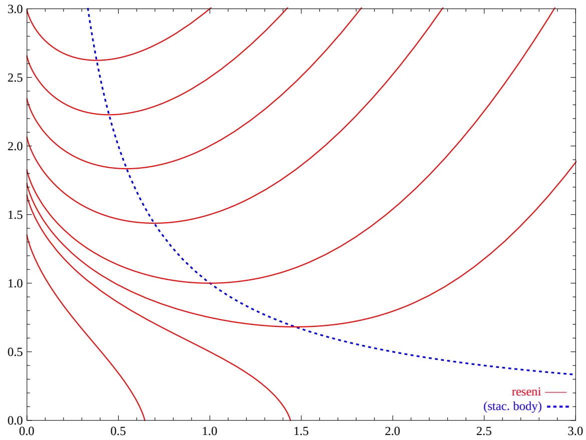
21) Nulová derivace je na kružnici $t^2 + x^2 = 1$, uvnitř tohoto kruhu řešení klesají, vně kruhu řešení rostou. Výpočet konvexity vede na kubickou rovnici.



22) Lokální extrémy leží na grafu funkce $x = \frac{t}{t-1}$. Pro $t > 1$ a $x > \frac{t}{t-1}$ nebo $t < 1$ a $x < \frac{t}{t-1}$ jsou řešení klesající, v oblasti "mezi" vetvěmi hyperboly jsou řešení rostoucí. Inflexní body leží na grafu funkce $x = \frac{t^2-t-1}{t^2-2t}$, sestávající ze tří klesajících větví (pro $t < 0$, $0 < t < 2$ a pro $t > 2$).



23) Řešení existují jen v I. kvadrantu. Lokální extrémy leží na grafu funkce $x = \frac{1}{t}$. Pro $0 < x < \frac{1}{t}$ je řešení klesající. Pro $x > \frac{1}{t}$ je řešení rostoucí. Konvexitu spočítat nelze.



24) Buď $x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)ds$ řešení na $[0, T)$, dodefinujme sudě na $(-T, 0]$: $\tilde{x}(t) = x(0) + \int_0^{-t} f(s, x(-s)ds$. Nyní ukážeme, že $\tilde{x}(t)$ je řešení: $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = -f(-t, x(t)) = f(t, x(t))$. Napojení v $t = 0$ je hladké:

$$\lim_{t\to 0+} \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{t\to 0+} f(t, x(t)) = f(0, x(0)),$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \lim_{t\to 0-} -f(t, x(t)) = f(0, x(0)).$$

Protože f je lipschitzovská v x, máme jednoznačnost řešení na $(-T, T)$ a tedy všechna řešení jsou sudá.
Pokud f není lipschitzovská v x: protipříklad $x'(t) = t\sqrt[4]{x^2}$, $x(0) = 0$.

25) Hodnoty dosáhne v čase $T = \frac{7}{5}$. $\int_1^T t dt = \int_1^5 \frac{1}{x^3} dx$.

26) Hodnoty dosáhne v čase $T = \sqrt{3} - 1$. $\int_0^T (t+1)dt = \int_1^{2e-1} \frac{1}{x+1} dx$.

27) Řešení nikdy nedosáhne hodnoty 2, protože $x \equiv 1$ je jednoznačné řešení původní rovnice s danou počáteční podmínkou.

28) Hodnoty dosáhne v čase $T = \frac{7}{3}$. $\ln(T + 1) - \ln 2 = \int_2^4 \frac{1}{x+1} dx$.

29) Blow-up nastane v čase $\sqrt{27} - 4$. $\int_1^T t + 4dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dt$.

30) Blow-up nenastane v konečném čase. $\int_1^T t^2 + 5 = \int_2^{+\infty} x + 1dx = +\infty$.