Neautonomní rovnice

Pro neautonomní rovnice je situace složitější v tom, že při zjišťování monotonie a konvexity musíme dávat pozor na hodnoty t a výsledné oblasti tedy už nebudou pásy v rovině, ale složitější množiny.

Příklad 4. Vyšetřete průběh řešení rovnice $x' = tx(x-2)$.

Řešení. Každým bodem roviny prochází právě jedno řešení. Protože funkce f je lichá v proměnné t, musí být řešení sudé funkce (viz. cvičení níže). Máme 2 stacionární řešení $x \equiv 0$, $x \equiv 2$. Znaménko funkce $f(t,x) = tx(x-2)$ nám dává monotonii. Řešení jsou rostoucí na množinách $\mathbb{R}_+ \times (2,+\infty)$, $\mathbb{R}_+ \times (-\infty,0)$ a $\mathbb{R}_- \times (0,2)$ a klesající na $\mathbb{R}_- \times (2,+\infty)$, $\mathbb{R}_- \times (-\infty,0)$ a $\mathbb{R}_+ \times (0,2)$. Vypočteme druhou derivaci

$$x''(t) = x(x-2) + (t(x-2)+tx)tx(x-2) = x(x-2)(1+2t^2(x-1)),$$

která nám dává křivku infletních bodů

$$x = 1 - \frac{1}{2t^2}.$$

Pro $x \in (2,+\infty)$ jsou tedy řešení konvexní. V pásu $\mathbb{R} \times (0,2)$ je zřejmé, že řešení x mají vlastní limitu v $\pm\infty$. Kdyby to nebyla 0, bylo by

$$\lim_{t\to\pm\infty} x'(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t \cdot \lim_{t\to\pm\infty} x(t)(x(t)-2) = \mp\infty,$$

což je nemožné. Tedy v pásu $\mathbb{R} \times (0,2)$ jsou řešení nejprve rostoucí konvexní, pak protnou křivku infletních bodů, stanou se konkávními, v bodě $t = 0$ dosáhnou svého maxima a začnou klesat, opět protnou křivku inflexních bodů, stanou se opět konvexními a pomalu klesají k 0.

V pásu $\mathbb{R} \times (-\infty,0)$ řešení pro hodně záporná t klesají od 0 a dále mají dvě možnosti. Buď rychle utečou do $-\infty$, aniž by protla křivku inflexních bodů. Nebo tuto křivku protnou a tím se stanou konvexními, doklesají do $t=0$, tam začnou opět růst, po čase se opět stanou konkávními a rostou k 0 pro $t \to +\infty$. Otázkou je, zda existují řešení prvního typu (řešení druhého typu existovat musí, protože body mezi levou a pravou křivkou inflexních bodů musí procházet nějaké řešení).

Tím jsme se dostali k poslední otázce, a to zda nastane či nenastane blow-up (v obou nekonečnech). Použijeme analogii Barrowova vzorce. Řešíme-li rovnici metodou separovaných proměnných, dostaneme rovnost

$$G(x) = \frac{1}{2}t^2 + c, \quad G(x) = \int \frac{1}{x(x-2)}dx.$$

Protože pro kladná řešení jsou konvexní a musí tedy nutně růst k nekonečnu, plyne z konvergence integrálu, že nastane blow-up (pro $x \to +\infty$ se t blíží ke konečnému číslu). Zda etistují řešení, která se blíží k $-\infty$ však nevíme. !!!