Úlohy

Vyšetřete průběh řešení následujících diferenciálních rovnic:

1. $x' = \frac{1}{x}(x+1)(x+2)$

2. $x' = e^x - 1$

3. $x' = x\ln(x+3)$

4. $x' = \frac{(x-1)\sqrt[3]{x+4}}{(x+1)\ln(x^2+1)}$

5. $x' = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+7/4}}$

6. $xx' = (x^2-1)\operatorname{arctg} x$

7. $x^2 \ln x x' = (x^3-1)\sin(\sin x)$

8. $(\ln x + 1)x' = (x-1)(e^x - e)$

9. $(x-2)x' = (x+1)\sqrt{x+1}(x+|x|-2)$

10. Pokud je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lichá a $t \mapsto x(t)$ je řešením rovnice (2), pak $t \mapsto -x(t)$ je také řešením rovnice (2). Je-li funkce f sudá a $t \mapsto x(t)$ je řešením rovnice (2), pak $t \mapsto -x(-t)$ je také řešením rovnice (2).

11. Uvažujme řešení rovnice $x' = (x+1)(x+2)$, které v čase $t = 0$ nabývá hodnoty 1. Před jakou dobou nabývalo hodnoty 0? Za jak dlouho nastane blow up?

12. Kolik času potřebuje řešení rovnice $x' = x\sqrt{2-x}$ k vystoupání z hodnoty 0 k hodnotě 2?

Teoretičtější úlohy

13. Ukažte, že každé řešení autonomní rovnice je monotónní.

14. Ukažte, že má-li řešení x rovnice (2) v $+\infty$ vlastní limitu rovnou x_1 a je-li f spojitá v x_1, pak $f(x_1) = 0$.

15. Dokažte Barrowův vzorec.