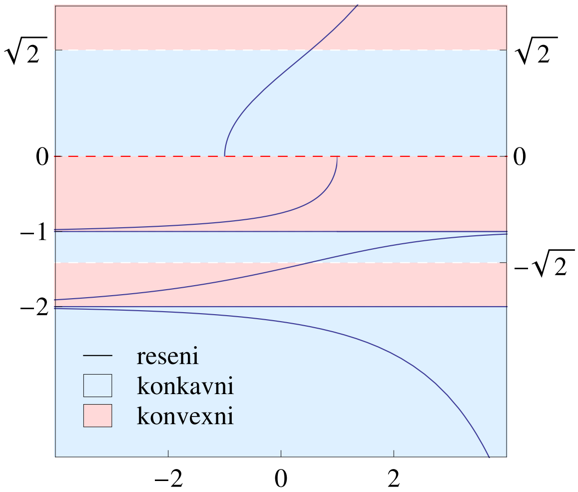
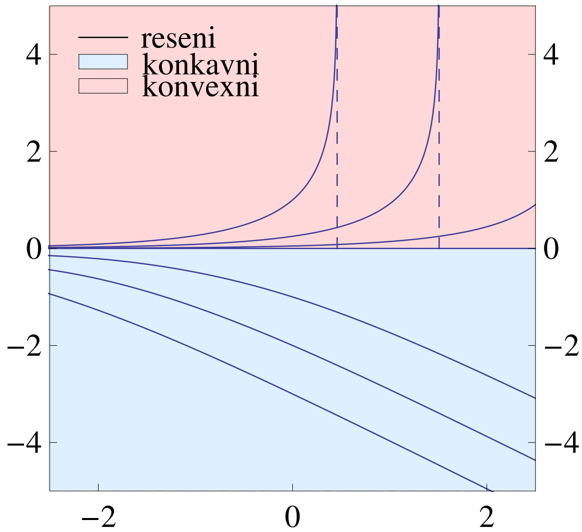
Řešení

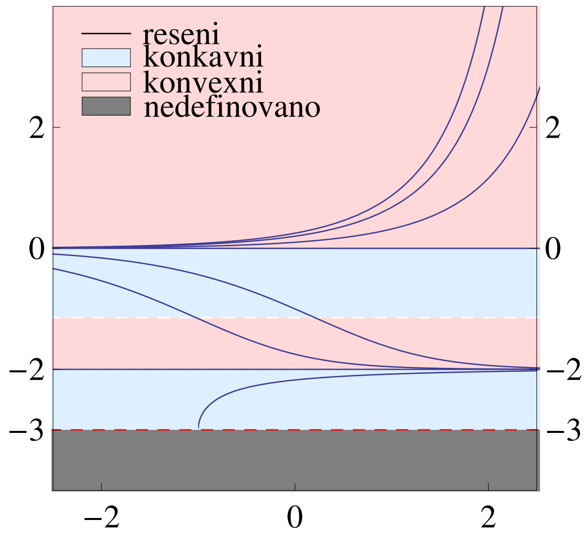
1) Stacionární řešení $x = -1$, $x = -2$, body $\mathbb{R} \times \{0\}$ neprochází žádné řešení. Na stacionární řešení se nic nenapojí, blow-up nenastane. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$ a $(-2, -1)$, klesající pro $x \in (-1, 0)$ a $(-\infty, -2)$. Konvetní jsou na $(-2, -\sqrt{2})$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, +\infty)$ a konkávní na mezilehlých intervalech. Na přímkách $x = \pm\sqrt{2}$ leží inflexní body. Pro $x \to 0$ se x' blizi k $\pm\infty$.



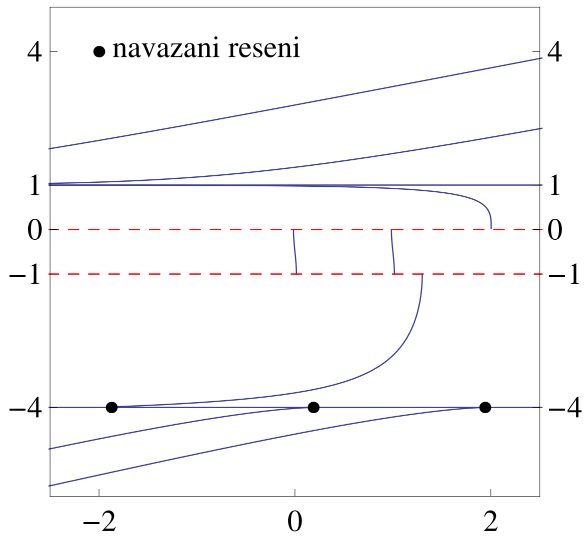
2) Stacionární řešení $x = 0$, nic se na něj nenapojí, blow-up nastane v $+\infty$, v $-\infty$ nikoli. Řešení jsou rostoucí a konvexní pro $x \in (0, +\infty)$, klesající a konkávní pro $x \in (-\infty, 0)$.



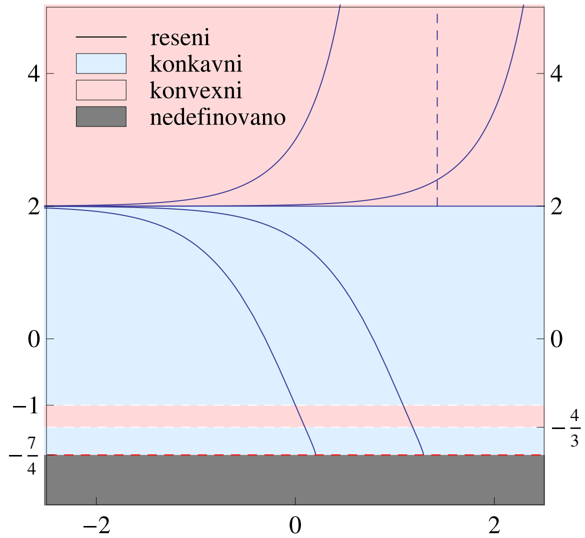
3) Každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (-3, +\infty)$ prochází právě jedno řešení. Stacionární řešení $x = 0$, $x = -2$, nic se na ně nenapojí (z jednoznačnosti). Blow-up v $+\infty$ nenastane. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$ a $(-3, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$. Pro $x \in (-3, -2)$ jsou konkávní, pro $x \in (0, +\infty)$ konvexní. V intervalu $(-2, 0)$ etistuje právě jeden bod x_0, kde se nabývá inflete. Řešení je konvexní pro $x \in (-2, x_0)$ a konkávní pro $x \in (x_0, 0)$. Pro $x \to -3$ zprava se x' blizi k $+\infty$.



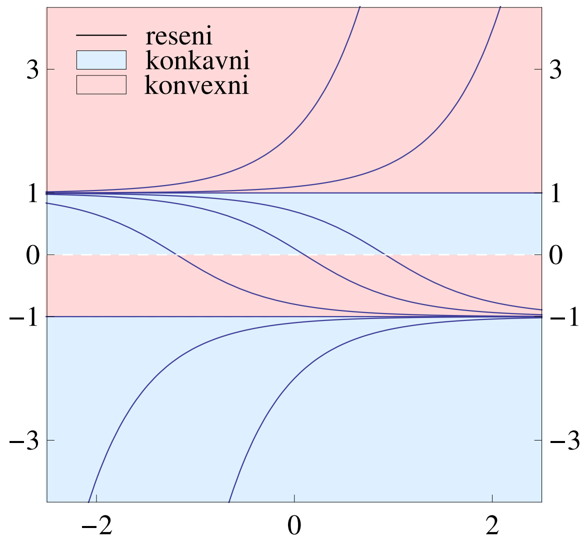
4) Stacionární řešení $x \equiv 1$, $x \equiv -4$. Řešení jsou rostoucí pro $x \in (1, +\infty)$ definovaná na $\mathbb{R}$ a $(-4, -1)$ definovaná na omezeném intervalu s nulovou derivací u -4 a nekonečnou u 0. Řešení jsou klesající pro $x \in (0, 1)$ definovaná na $(-\infty, T)$ s derivací $-\infty$ u 0, dále pro $x \in (-1, 0)$ definovaná na (T_1, T_2) s derivací $-\infty$ u 0 a -1 a pro $x \in (-\infty, -4)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nulovou derivací u -4. Řešení v pásech $(-\infty, -4)$ a $(-4, -1)$ se hladce napojují na stacionární řešení $x \equiv -4$.



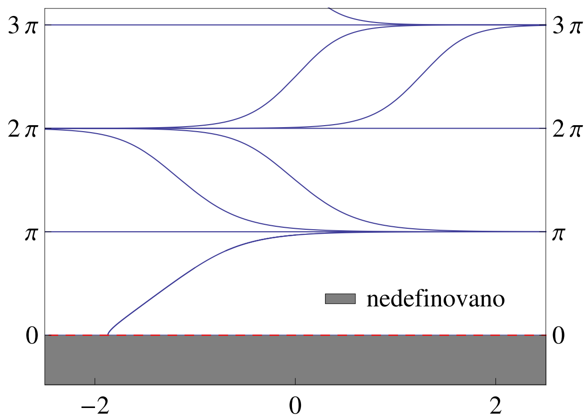
5) Stacionární řešení $x \equiv 2$. Rostoucí řešení v pásu $x \in (2, +\infty)$ definovaná na $(-\infty, T)$, konvexní. Klesající řešení v pásu $x \in (-7/4, 2)$ definovaná na $(-\infty, T)$, konkávní pro $x \in (-1, 2)$, $(-7/4, -4/3)$, konvexní pro $x \in (-4/3, -1)$. Pro $x \to -7/4$ máme $x' \to -\infty$.



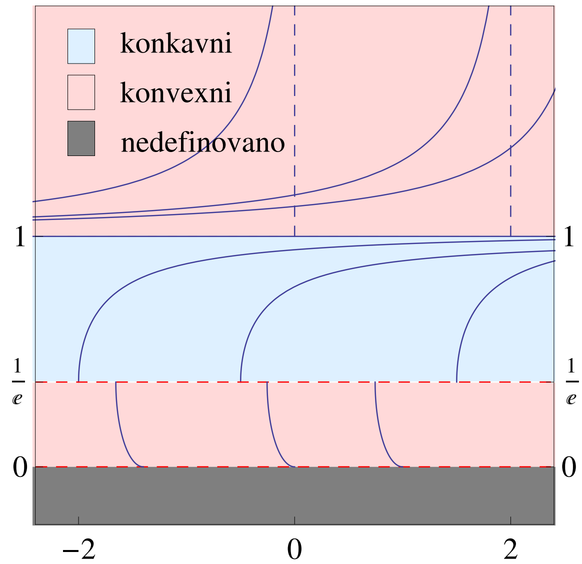
6) Stacionární řešení $x \equiv \pm 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Klesající řešení v pásu $x \in (-1, 1)$ definovaná na $\mathbb{R}$ (v nule lze dodefinovat, má řešení derivaci -1).



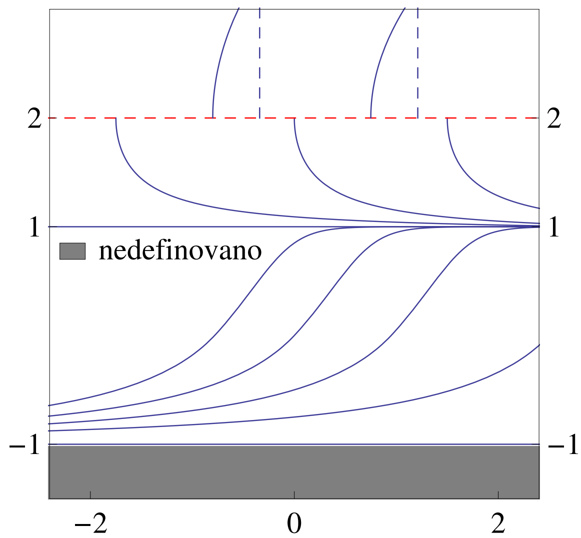
7) Stacionární řešení $x \equiv 1$ a $x \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi)$ definovaná na $\mathbb{R}$, kromě pásu $(0, \pi)$, kde jsou definována jen na $(T, +\infty)$, $x'(t) \to +\infty$ pro $t \to T+$ (pro $x = 1$ lze dodefinovat). Klesající řešení v pásech $x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi)$ definovaná na $\mathbb{R}$.



8) Stacionární řešení $x \equiv 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (1, +\infty)$ definovaná na $(-\infty, T)$ a $x \in (1/e, 1)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nekonečnou derivací u $1/e$. Klesající řešení v pásu $x \in (0, 1/e)$ definovaná na (T_1, T_2) s nekonečnou derivací u $1/e$.



9) Stacionární řešení $x \equiv \pm 1$. Rostoucí řešení v pásech $x \in (2, +\infty)$ definovaná na $(-T_1, T_2)$ s nekonečnou derivací u 2 a $x \in (-1, 1)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Klesající řešení v pásu $x \in (1, 2)$ definovaná na $(T, +\infty)$ s nekonečnou derivací u 2.



10) a) f lichá, potom $\frac{d}{dt}(-x(t)) = -x'(t) = -f(x(t)) \overset{lichost}{=} f(-x(t))$
b) f sudá, potom věta o derivaci složené funkce říká: $\frac{d}{dt}(-x(-t)) = x'(-t) = f(x(-t))$

11) Hodnoty 0 nabývalo v čase $\ln(3/4)$, blow up nastane za $\ln(3/2)$.

12) Z hodnoty 0 se funkce nikdy nedostane (z jednoznačnosti řešení).

13) sporem: nechť řešení x není monotónní na (T_1, T_2), tj. BÚNO existují $a < b < c$ taková, že $x(c) < x(a) < x(b)$. Ukažte, že existuje $r \in (a, b)$, že $x'(r) > 0$. Ukažte, že existuje $t \in (b, c)$, že $x(t) = x(r)$. Uvažujte $t_0 := \inf t > r : \ x(t) = x(r)$. Ukažte, že $t_0 > r$, $x(t_0) = x(r)$ a $x'(t_0) = x'(r) > 0$. Odtud plyne existence $s \in (r, t_0)$ spňujícího $x(s) = x(r)$, což je spor.

14) Nechť $\exists \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_1$, ze spojitosti f v bodě x_1 existuje $h > 0$; $|f(x)| \leq K$ na $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ a platí $\lim_{t\to+\infty} x(t+h) = x_1 = \lim_{t\to+\infty} x(t)$. Pišme tedy

$$0 = x_1 - x_1 = \lim_{t\to\infty} x(t+h) - x(t) = \lim_{t\to\infty} x_0 + \int\limits_0^{t+h} f(x(s)ds - x_0 - \int\limits_0^{t} f(x(s))ds =$$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+h} f(x(s))ds \overset{s=y+t}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{h} f(x(y+t))dy = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{h} f(x(y+t))dy \overset{Lebesgue}{=}$$

$$\int_0^h \lim_{t\to\infty} f(x(y+t))dy \overset{VOLSF}{=} \int\limits_0^{h} f(x_1)dy = hf(x_1)$$

Tedy $f(x_1) = 0$.

15) Označme $I = (t_0, t_1)$ $a := \lim_{t\to t_0+} x(t)$, $b := \lim_{t\to t_1-} x(t)$, dále předpokládejme, že $f(x(t)) \neq 0$ na I, BÚNO $f(x(t)) > 0$ na I. $x(t)$ je rostoucí na I a vzájmeně jednoznačně zobrazí I na $J = (a, b)$. Označme $g(y) : J \to I$ inverzi k $x(t)$. Derivaci $g(y)$ spočteme pomocí věty o derivování inverzní funkce

$$g'(y) = \frac{1}{x'(g(y))} = \frac{1}{f(x(g(y)))} = \frac{1}{f(y)}.$$

Nyní stačí integrovat přes interval (α, β), kde $a < \alpha < \beta < b$

$$g(\beta) - g(\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(y)} dy.$$

K dokončení důkazu stačí udělat limitní přechod. Pro limitní přechod v intergrálu se použije Leviho věta.