Kvalitativní analýza diferenciálních rovnic

Uvažujme diferenciální rovnici

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

kde $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce proměnné t a f je spojitá funkce, $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$. V této kapitole se budeme snažit zjistit o řešení konkrétní rovnice tohoto typu co nejvíce informací, aniž bychom tuto rovnici řešili, tj. aniž bychom hledali explicitní vyjádření řešení.

Shrňme si základní poznatky:

- Je-li f spojitá na okolí bodu (t_0, x_0), prochází tímto bodem nějaké řešení. (Peanova věta)

- Je-li f lipschitzovská v proměnné x na okolí bodu (t_0, x_0), prochází tímto bodem právě jedno řešení. (Picardova věta) Speciálně, je-li $\partial f/\partial x$ spojitá v bodě (t_0, x_0), prochází tímto bodem právě jedno řešení.

- Je-li $f(t, x) > 0$ (resp. < 0), je řešení procházející bodem (t, x) v tomto bodě rostoucí (resp. klesající). (Protože $x'(t) = f(t, x)$.)

Dále, je-li $f \in C^1(M)$, je pro řešení x pravá strana rovnice (1) spojitě diferencovatelná, tedy x je třídy C^2 na svém definičním oboru. Je tedy možné vyšetřovat konvexitu pomocí druhé derivace:

$$x''(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) x'(t) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)\right] f(t, x).$$

- Pokud na okolí bodu (t, x) je f třídy C^1 a platí

  $$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) f(t, x) > 0$$

  (resp. < 0), je řešení procházející bodem (t, x) na okolí tohoto bodu konvexní (resp. konkávní).

Příklad 1. Vyšetřete monotonii a konvexitu řešení rovnice $x' = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

Řešení. Zřejmě každým bodem pásů $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(-1,1)$, $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ prochází právě jedno řešení. Body přímek $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ sice prochází nějaká řešení, ale Picardova věta nám nedává jednoznačnost ($\partial f/\partial x(t,\pm 1) = \pm\infty$) a níže se ukáže, že skutečně těmito body prochází mnoho různých řešení.

Znaménko funkce f nám dává: x je rostoucí v pásu $\mathbb{R}\times(-1,1)$ a klesající na $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$ a $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$. Pro $f=0$ dostáváme stacionární řešení $x=\pm 1$. Pro zjištění druhé derivace spočítáme

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)f(t,x)=\frac{3}{2}\frac{1}{(1-x^2)^{2/3}}(-2x).$$

Tedy x je konvexní na $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ a $\mathbb{R}\times\{-1,0\}$ a konkávní na $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(0,1)$, na přímce $\mathbb{R}\times\{0\}$ leží inflexní body.

Další důležitou vlastností řešení je jeho definiční obor. V předchozím příkladu jsme nezodpověděli otázku, zda řešení v pásu $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$ zůstanou stále v tomto pásu, nebo se napojí v konečném čase na stacionární řešení ± 1. [1] To, že definičním oborem těchto řešení bude $\mathbb{R}$, plyne ihned z věty o opuštění kompaktu (vezmeme-li za onu kompaktní množinu $[-1,1]\times[-K,K]$, plyne z předchozího, že tato množina nemůže být opuštěna vrchem ani spodem, řešení tedy bude definováno na větším intervalu než $[-K,K]$). Naopak u maximálních řešení v pásech $\mathbb{R}\times(-\infty,-1)$, $\mathbb{R}\times(1,+\infty)$ není zřejmé, zda budou definována na celém $\mathbb{R}$, nebo utečou do nekonečna v konečném čase (tj. nastane "blow up"). Z věty o opuštění kompaktu plyne, že musí nastat jedna z těchto dvou situací. Tyto jevy prozkoumáme v následující části o autonomních rovnicích.

Autonomní rovnice a Barrowův vzorec

V této části se budeme zabývat autonomními rovnicemi, tj.

$$x' = f(x). \tag{2}$$

Pro tyto rovnice jsou typické některé vlastnosti, které se objevily v předchozím příkladu.

- Je-li $t\mapsto x(t)$, $t\in(a,b)$ řešení, pak $t\mapsto x(t+c)$, $t\in(a-c,b-c)$ je také řešení.
- Je-li $f(x_0)=0$, je $x(t)=x_0$ stacionární řešení (definované na celém $\mathbb{R}$).

[1] Stacionární řešení pak už neopustí. Situace$x(t_0)=1$ a $x(t_0+\delta)>1$ nemůže nastat, protože řešení klesající pokud $x(t)>1$, $t(t_0+\delta-\varepsilon)>x(t_0+\delta)$ for all $\varepsilon>0$. Z podobného důvodu nemůže řešení opustit přímku $x=1$ směrem dolů.

- Každé řešení autonomní rovnice je monotónní. (důkaz viz cvičení)
- Je-li $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = x_1$ vlastní, pak $f(x_1) = 0$. (důkaz viz cvičení)

Při zkoumání definičního oboru řešení se nám bude hodit Barrowův vzorec:

Věta 1 (Barrowův vzorec)**.** *Nechť x je řešením rovnice (2) na intervalu $I = (t_0, t_1)$, f je spojitá a $f(x(t)) \neq 0$ na I. Označme $a := \lim_{t\to t_0+} x(t)$ a $b := \lim_{t\to t_1-} x(t)$. Potom*

$$t_1 - t_0 = \int_a^b \frac{1}{f(z)} dz. \tag{3}$$

Důkaz. Viz cvičení. □

Barrowův vzorec udává čas, který potřebuje řešení k tomu, aby vystoupalo (resp. zklesalo) z hodnoty a do hodnoty b (zamyslete se nad vzorcem (3)). Speciálně pak Barrowův vzorec říká následující:

- Řešení konvergující k b zleva (resp. zprava) pro $t \to T$ (T je krajní bod intervalu, na kterém je řešení definováno) se napojí v konečném čase na stacionární řešení $x = b$, právě když (pro malé δ)

  $$\int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{f(z)} dz \quad \left(\text{resp. } \int_{b}^{b-\delta} \frac{1}{f(z)} dz\right)$$

  konverguje.
- Řešení, jehož limita je $+\infty$ (resp. $-\infty$) má zprava (resp. zleva) neomezený definiční obor, právě když (pro velké K)

  $$\int_{K}^{+\infty} \frac{1}{f(z)} dz \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{K} \frac{1}{f(z)} dz\right)$$

  diverguje. Tj. "blow up"nastane, právě když integrál konverguje.

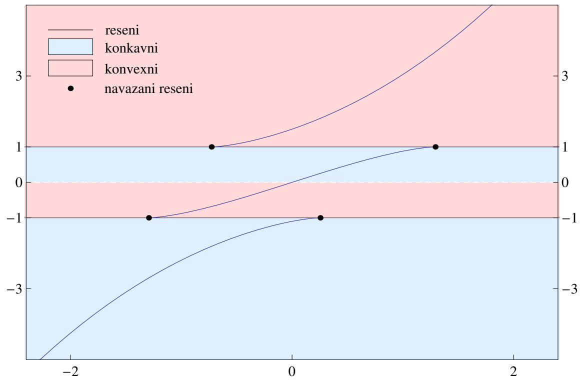
Příklad 2. Zjistěte, zda některými body roviny probíhá více než jedno řešení rovnice $x' = \sqrt[3]{1-x^2}$ a zda u některých řešení nastane "blow up".

Řešení. Protože integrál

$$\int (1-x)^{-1/3}(1+x)^{-1/3} dx \tag{4}$$

konverguje u bodů ± 1 zprava i zleva, napojí se všechna řešení konvergující k ± 1 na stacionární řešení v konečném čase a tedy body $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ prochází nekonečně mnoho maximálních řešení.

Protože integrál (4) diverguje u $\pm\infty$, nenastane pro řešení v pásech $\mathbb{R} \times (-\infty, -1)$, $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$ "blow up".



Příklad 3. Vyšetřete průběh řešení rovnice $\sqrt{x+1}x' = e^x - 1$.

Řešení. Protože $f(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitě diferencovatelná na $(-1, +\infty)$, prochází každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (-1, +\infty)$ právě jedno řešení. Znaménko funkce f nám dává stacionární řešení $x \equiv 0$ a dále:

Pro $x \in (-1, 0)$ máme klesající řešení, která mají v $-\infty$ limitu 0 a na nulu se nenapojí (z jednoznačnosti řešení), zatímco do -1 dojdou v konečném čase $t = b$ ($\int_{-1}^{-1/2} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x-1} dx$ konverguje) a

$$\lim_{t \to b-} x'(t) = \lim_{t \to b-} \frac{e^{x(t)} - 1}{\sqrt{x(t) + 1}} = -\infty.$$

Pro $x \in (0, +\infty)$ je řešení rostoucí, v $-\infty$ má limitu 0 a nenapojí se na stacionární řešení. Protože

$$\int_K^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} dx$$

konverguje, nastane "blow up".

Vypočteme druhou derivaci:

$$x''(t) = \frac{e^x \sqrt{x+1} - (e^x - 1)\frac{1}{2}\sqrt{x+1}^{-1}}{x+1} \cdot \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1}} =$$

$$\frac{e^x - 1}{(x+1)^2} \left(e^x \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right)$$

Protože funkce $e^x(x+1/2)+1/2$ je kladná na $(-1,+\infty)$ (například zderivováním zjistíme, že tato funkce nabývá minima v bodě $x=-3/2$), jsou řešení na $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ konvexní a řešení na $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ konkávní.