Jednoznačnost a diferencovatelnost řešení

V této kapitole si budeme všímat vlastností řešicí funkce. Nejprve se podíváme na otázky kolem existence a jednoznačnosti řešení; úlohy s tím spojené mají převážně teoretický charakter.

Druhá, obsáhlejší část kapitoly je věnována diferencovatelnosti řešení (přesněji tedy řešicí funkce) podle počátečních podmínek a dalších parametrů rovnice. Příklady sem patřící jsou obtížnějšího, ale v zásadě početního charakteru.

Úlohy na existenci a jednoznačnost řešení.

Otázky existence a jednoznačnosti řešení patří k základním problémům teorie diferenciálních rovnic. Ovšem fakt, že řešení je právě jedno, je velmi užitečný i v praxi, tj. když řešení konkrétně hledáme (třeba i numericky).

Pro účely následujících příkladů se omezíme na skalární rovnici

$$x' = f(x,t), \tag{1}$$

kde f je funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. *Řešením* budeme rozumět dvojici (x, I), kde I je otevřený interval a $x : I \to \mathbb{R}$ je funkce, splňující rovnici (1) *všude* v I. Odsud ihned plyne: x je diferencovatelná (= má konečnou derivaci) a tudíž je spojitá v I. Je-li f spojitá funkce, je x už nutně třídy C^1.

Základním výsledkem existenční teorie je Peanova věta:

Věta 1. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na okolí bodu $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom existuje $\delta > 0$ a řešení $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ rovnice* (1)*, splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$.*

Předpoklad spojitosti f a též lokální charakter věty nelze obecně vylepšit; viz příklady 1, 2 níže.

Definice 1. Řekneme, že rovnice má vlastnost *lokální jednoznačnosti* v bodě (t_0, x_0), jestliže pro libovolná řešení (x, I), (y, I), splňující $x(t_0) = y(t_0) = x_0$, $t_0 \in I \cap J$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \equiv y \quad \text{na } I \cap J \cap \mathcal{U}(t_0, \delta). \tag{2}$$

Nejběžněji užívaná postačující podmínka lokální jednoznačnosti je tato (možná zobecnění viz cvičení 5, 6):

Věta 2. *Nechť $f(x,t)$ je lipschitzovská vůči proměnné x na okolí (t_0, x_0), tj. existuje $L > 0$ tak, že*

$$|f(\xi, t) - f(\eta, t)| \leq L|\xi - \eta|$$

na jistém okolí bodu (t_0, x_0). Potom rovnice (1) má v bodě (t_0, x_0) vlastnost lokální jednoznačnosti.

S problematikou jednoznačnosti souvisí otázky integrace *diferenciálních nerovnic*. Základním výsledkem je zde následující tzv. Gronwallovo lemma.

Věta 3 (Gronwallovo lemma.)**.** *Nechť ξ, ρ jsou nezáporné, spojité funkce v intervalu I; nechť $a \geq 0$ je konstanta, $t_0 \in I$. Jestliže*

$$\xi(t) \leq a + \Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s)\xi(s)ds \Big|,$$

pro každé $t \in I$, pak

$$\xi(t) \leq a \exp \Big(\Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s)ds \Big| \Big)$$

pro každé $t \in I$.

Úlohy na existenci a jednoznačnost řešení.

1. Definujme $F(x) = 0$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 1$. Ukažte, že úloha

$$x' = F(x), \qquad x(0) = 0,$$

nemá řešení řešení na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

2. Je dáno $\eta > 0$. Sestrojte příklad spojité funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že řešení rovnice $x' = F(x)$ při *libovolné* počáteční podmínce neexistuje na intervalu delším než $\eta > 0$.

3. Nechť g, h jsou spojité funkce. Ukažte, že rovnice se separovanými proměnnými

$$x' = g(x)h(t)$$

má vlastnost lokální jednoznačnosti v okolí každého bodu (t_0, x_0), splňujícího $g(x_0) \neq 0$.

4. Nechť $f(x,t)$ je pro každé t pevné nerostoucí vzhledem k x. Potom rovnice (1) má vlastnost (globální) *dopředné jednoznačnosti*; tj. $x(t_0) = y(t_0)$ pro $t \in I \cap J$ implikuje $x \equiv y$ pro $t \in I \cap J \cap [t_0, +\infty)$.

5. Ukažte na příkladu, že Větu 2 nelze zobecnit na funkce a-Hölderovské vůči x, kde $a \in (0,1)$.

6. * Dokažte, že Věta 2 zůstane v platnosti, pokud předpokládáme existenci spojité, nezáporné funkce ω takové, že

$$|f(\xi,t) - f(\eta,t)| \leq \omega(|\xi - \eta|)$$

na jistém okolí bodu (t_0, x_0), splňující

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \tag{3}$$

pro každé $\delta > 0$.

7. * Ukažte, že předchozí zobecnění Věty 2 je optimální v následujícím smyslu: Nechť f je spojitá funkce, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ pro $x > 0$, a platí

$$\int_0^\delta \frac{du}{f(u)} < +\infty$$

pro nějaké $\delta > 0$. Potom úloha $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ má alespoň dvě řešení.

8. Nalezněte důkaz Gronwallova lemmatu na Wikipedii. Je zde uvedený důkaz dostatečně přesný?

9. Dokažte Větu 2 pomocí Gronwallova lemmatu.

10. * Ukažte, že předpoklad integrovatelnosti ρ nelze v Gronwallově lemmatu vynechat: je-li $\rho \geq 0$ měřitelná funkce a

$$\int_0^\delta \rho(s) ds = +\infty$$

pro každé $\delta > 0$, pak existuje spojitá funkce $\xi \geq 0$ taková, že

$$\xi(t) \leq \int_0^t \rho(s)\xi(s) ds, \tag{5}$$

pro každé $t > 0$, avšak $\xi > 0$ pro $t > 0$.

Výsledky a návody.

1) Protože $x'(0) = F(0) = 1$, je $x > 0$ na jistém $(0, \delta')$; užitím rovnice zde $x' \equiv 0$. Tedy $x \equiv konst$ na $[0, \delta']$, což vede ke sporu s předchozím.

2) Díky Barrowově formuli stačí vzít libovolnou $F > 0$, splňující

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{F(u)} < \eta.$$

3) Ekvivalentními úpravami rovnice dostaneme

$$G(x(t)) = F(t) + G(x_0),$$

na nějakém okolí t_0, kde $H = \int h$, $G = \int g^{-1}$, a G je prostá.

4) Jsou-li x, y řešení, pak $t \mapsto (x(t) - y(t))^2$ je nerostoucí.

5) Rovnice $x' = (1-a)^{-1}|x|^a$ v bodě $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

6) Označme $z := x - y$ rozdíl dvou řešení. Sporem: nechť $z(t_0) = 0$, $z(t_1) = \delta > 0$ pro nějaké $t_1 > t_0$. Potom

$$z' = f(x) - f(y) \leq \omega(|z|) + \varepsilon, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

$\varepsilon > 0$ pevné, libovolné. Pravou stranou lze dělit a tedy

$$t_1 - t_0 \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{z'(t)dt}{\omega(|z(t)|) + \varepsilon} = \int_0^\delta \frac{du}{\omega(u) + \varepsilon}.$$

Přechodem $\varepsilon \to 0+$ (Leviho věta) plyne konečnost integrálu v podmínce (3) – spor.

7) Kromě $x \equiv 0$ je to funkce inverzní k funkci

$$T(x) := \int_0^x \frac{du}{f(u)}, \qquad x \in [0, \delta].$$

8) Viz: `http://en.wikipedia.org/wiki/Gronwall's_inequality`
Důkaz je pořádku (rozmyslete si ovšem sami důkladně odstranění absolutní hodnoty pro $t < t_0$). — Lze též poznamenat, že vzoreček

$$v(t_1) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v'(s)ds, \tag{4}$$

není „zřejmý“; tj. nestačí pouhá existence v'. Stačí předpokládat, že v' je spojitá, obecněji Riemannovsky integrovatelná. Viz například heslo „Fundamental Theorem of Calculus“ na Wikipedii.

9) Pro rozdíl řešení $z := |x - y|$ odvodíme

$$z(t) \leq z(0) + \Big| \int_0^t Lz(s)ds \Big|.$$

10) Konstrukce probíhá odzadu: položíme $t_0 = 1$, $\xi \equiv 1$ pro $t \geq t_0$, spojitě klesneme na hodnotu $\xi(s_0) = 1/2$, kde $s_0 < t_0$, kterou podržíme až do bodu $t_1 < 1/2$. Lze požadovat

$$\int_{t_1}^{s_0} \rho(s) 2^{-1} ds = \int_{t_1}^{s_0} \rho(s)\xi(s)ds \geq 1.$$

Tím je zaručeno splnění (5) pro každé $t \geq t_0$. Nyní spojitě klesneme do $x(s_1) = 1/4$, kde $s_1 < t_1$, a hodnotu $\xi \equiv 1/4$ držíme až do bodu $t_2 < 1/4$, přičemž požadujeme

$$\int_{t_2}^{s_1} \rho(s) 2^{-2} ds = \int_{t_2}^{s_1} \rho(s)\xi(s) ds \geq 1/2.$$

Tím je zaručeno splnění (5) pro všechna $t \geq t_1$. Atd.

Derivace řešicí funkce.

Je dána úloha

$$\begin{aligned} x' &= f(x,t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{6}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^1 funkce, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina, $(x_0, t_0) \in \Omega$. Označme

$$\varphi(t; t_0, x_0) := x(t), \tag{7}$$

kde $x(t)$ je maximální řešení úlohy (6). Ze základní teorie víme, že φ (tzv. „řešicí funkce") je korektně definovaná, její definiční obor je otevřená množina (v $\mathbb{R}^{n+2}$) a konečně φ závisí spojitě na t, t_0 a x_0.

Zajímá nás, zda funkce φ je také diferencovatelná. Zavedeme si vhodné značení.

Značení. Symbolem $\frac{\partial}{\partial x_0^w}$ značíme derivaci podle proměnné x_0 ve směru $w \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_0^w} g(x_0, z) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big[g(x_0 + hw, z) - g(x_0, z) \big];$$

z jsou ostatní proměnné, podle nichž se nederivuje.

Derivace podle počáteční podmínky.

Věta 4. *Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^1 funkce, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina. Potom je řešicí funkce φ úlohy (6) diferencovatelná podle proměnné x_0. Označíme-li*

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^w} \varphi(t; t_0, x_0),$$

lze u nalézt jako řešení „rovnice ve variacích"

$$\begin{aligned} u' &= \big[\nabla_x f(x,t)\big] u, \\ u(t_0) &= w. \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnice (8) po složkách je

$$\begin{aligned} u_i' &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t) u_j, \\ u_i(t_0) &= w_i, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$; jde tedy o lineární rovnici, což zaručuje globální existenci a jednoznačnost řešení. K jeho výpočtu je ovšem potřeba znát $x = x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$. Zapamatujme si také, že (8) vznikne formálně aplikací $\frac{\partial}{\partial x_0^w}$ na původní úlohu (6).

Příklad 1. Spočítejme $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t; t_0, x_0)$ v bodě $x_0 = 1$ pro úlohu

$$x' = t(1 - x^2), \quad x(t_0) = x_0.$$

Řešení. Rovnice ve variacích má tvar

$$u' = -2txu, \quad u(t_0) = 1.$$

Pro počáteční podmínku $x(t_0) = 1$ máme $x(t) = \varphi(t; t_0, 1) \equiv 1$; řešíme tedy úlohu

$$u' = -2tu, \quad u(t_0) = 1.$$

odtud snadno

$$u(t) = \exp(t_0^2 - t^2).$$

Výsledek můžeme napsat také pomocí symbolu „malé ó" jako

$$\varphi(t; t_0, 1 + h) = 1 + h \exp(t_0^2 - t^2) + o(h), \quad h \to 0,$$

pro každé pevné t, t_0.

Příklad 2. Spočítejme parciální derivace $\varphi(t; 0, a, b)$ podle a, b v bodě $a = b = 0$, kde φ je řešicí funkce úlohy

$$x'' + e^x + \frac{2}{1 - x'} = 3, \tag{9}$$

$$x(0) = a, \ x'(0) = b. \tag{10}$$

Řešení. Převedeme na systém 1. řádu:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 3 - e^x - \frac{2}{1 - y}, \\ x(0) &= a, \\ y(0) &= b. \end{aligned}$$

Označíme-li $u = \frac{\partial}{\partial x_0^w} x$, $v = \frac{\partial}{\partial x_0^w} y$, kde $x_0 = (a, b)$, $w = (\alpha, \beta)$, obdržíme rovnici ve variacích:

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= -e^x u - \frac{2v}{(1-y)^2}, \\ u(0) &= \alpha, \\ v(0) &= \beta. \end{aligned}$$

První dvě rovnice jsou ekvivalentní

$$u'' + e^x u + \frac{2u'}{(1-x')^2} = 0, \tag{11}$$

což je variace původní rovnice (9). Protože zjevně $\varphi(t; 0, 0, 0) = 0$, je $x \equiv y \equiv 0$, což vede konečně na rovnici

$$u'' + 2u' + u = 0, \quad u(0) = \alpha,\ u'(0) = \beta.$$

Počáteční podmínky (α, β) rovno $(1, 0)$ respektive $(0, 1)$ dávají řešení $u = (1 + t)e^{-t}$ respektive $u = te^{-t}$. To ve výsledku znamená

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}(t; 0, a, b)|_{(a,b)=(0,0)} = (1 + t)e^{-t}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b}(t; 0, a, b)|_{(a,b)=(0,0)} = te^{-t}. \tag{13}$$

Víme ovšem více, neboť dle počáteční podmínky jsme zderivovali také

$$y = x' = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

výsledek se skrývá ve funkci $v = u'$. Celkem tedy

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t; 0, a, b)|_{(a,b)=(0,0)} = -te^{-t}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t; 0, a, b)|_{(a,b)=(0,0)} = (1 - t)e^{-t}. \tag{15}$$

Všimněme si, že (14), (15) vzniklo též formálním derivováním rovností (12), (13) podle t, což je pochopitelně důsledkem faktu, že (11) vznikne přímo z (9) formální derivací dle w.

Derivování podle parametru.

Při derivování řešení podle parametru je situace podobná. Máme úlohu

$$\begin{aligned} x' &= f(x,t,\lambda), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{16}$$

Parametr λ je pro jednoduchost skalární. Označme

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, \lambda),$$

odpovídající maximální řešení. Potom platí:

Věta 5. *Nechť $f : \Omega' \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ je C^1 funkce, kde $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n+2}$ je otevřená množina. Potom je řešicí funkce φ úlohy* (16) *diferencovatelná podle proměnné λ. Označíme-li*

$$u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t; t_0, x_0, \lambda),$$

lze u nalézt jako řešení rovnice

$$\begin{aligned} u' &= \big[\nabla_x f(x,t,\lambda)\big] u + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,t,\lambda), \\ u(t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Rovnice je opět formální derivací (16) podle λ; zapsáno po složkách

$$u_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,\lambda) u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}(x,t,\lambda),$$

$i = 1, \dots, n$. Lineární (nehomogenní) rovnice, k jejímuž řešení ovšem potřebujeme znát $x = x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$.

Příklad 3. Vypočítejme derivaci řešení rovnice

$$x' = x^2 + \lambda^2, \qquad x(0) = 0,$$

podle parametru λ v bodě $\lambda = 1$. Nápověda: $x(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ je příslušné maximální řešení.

Řešení. Rovnice ve variacích je

$$u' = 2xu + 2\lambda, \quad u(0) = 0.$$

Dosadíme $\lambda = 1$, a protože $x(t) = \varphi(t; 0, 0, 1) = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, dostáváme úlohu

$$u' - (2 \operatorname{tg} t) u = 2.$$

Integrační faktor $\cos^2 t$ nás lehce přivede k obecnému tvaru řešení

$$u \cos^2 t = c + t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Nulová počáteční podmínka (typická pro derivaci podle parametru!) konečně dává

$$u = \frac{t}{\cos^2 t} + \operatorname{tg} t.$$

Výsledek můžeme zapsat také takto:

$$\varphi(t; 0, 0, 1 + h) = \operatorname{tg} t + h \left(\frac{t}{\cos^2 t} + \operatorname{tg} t \right) + o(h), \qquad h \to 0,$$

pro každé pevné $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Derivování řešicí funkce podle času.

V předchozím jsme viděli, že řešicí funkce $\varphi = \varphi(t; t_0, x_0)$, příslušná k úloze (6), má za předpokladů Věty 4 parciální derivace (ve všech směrech) podle proměnné x_0.

Tyto derivace nalezneme jako řešení rovnice ve variacích (8). Řešicí funkce – a potažmo pravá strana rovnice (8) – závisí spojitě na t, t_0 a x_0. Proto i zmíněné derivace φ závisí na všech těchto proměnných spojitě, neboli φ je diferencovatelná (má totální diferenciál) vůči vektorové proměnné x_0.

Přímo z definice řešicí funkce plyne rovnost

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t; t_0, x_0) = f(\varphi(t; t_0, x_0), t),$$

a tedy také spojitost této parciální derivace vůči všem proměnným. Zbývá vyřešit diferencovatelnost vůči t_0. Použijeme následující trik: lze psát

$$\varphi(t; t_0 + h, x_0) = \varphi(t; t_0, \psi(h)),$$

kde definujeme

$$\psi(h) := \varphi(t_0; t_0 + h, x_0).$$

Protože φ je diferencovatelná dle poslední proměnné, stačí zderivovat ψ; podle věty o derivaci složené funkce je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0^{\psi'(0)}}(t; t_0, x_0) = \big[\nabla_{x_0} \varphi(t; t_0, x_0)\big] \psi'(0). \qquad (18)$$

Označme (pro malé pevné h)

$$y(t) = \varphi(t; t_0 + h, x_0);$$

tedy podle Taylorova rozvoje (o středu $t_0 + h$)

$$\psi(h) = y(t_0 + h - h) = y(t_0 + h) - hy'(t_0 + h) + R(h),$$

kde zbytek $R(h) = (-h)^2 y''(\theta)/2$ pro vhodné θ mezi $t_0 + h$ a t_0. Uvážíme-li, že y je řešení první rovnice v (6), máme

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t), \\ y''(t) &= \nabla_x f(y(t), t) \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t) \\ &= \nabla_x f(y(t), t) \cdot f(y(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t). \end{aligned}$$

Díky spojitosti φ a derivací f lze tedy $y''(\theta)$ odhadnout nezávisle na malém h. Protože $y(t_0 + h) = x_0 = \psi(0)$, máme celkem

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \psi(0) - hf(x_0, t_0 + h) + \mathcal{O}(h^2) \\ \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} &= -f(x_0, t_0 + h) + \mathcal{O}(h), \end{aligned}$$

odtud pro $h \to 0$

$$\psi'(0) = -f(x_0, t_0).$$

S přihlédnutím k (18) a Větě 4 dostáváme následující:

Věta 6. *Za předpokladů Věty 4 je řešicí funkce φ diferencovatelná podle proměnné t_0. Označíme-li*

$$u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0),$$

lze u nalézt jako řešení úlohy

$$\begin{aligned} u' &= \big[\nabla_x f(x, t)\big] u, \\ u(t_0) &= -f(x_0, t_0). \end{aligned} \tag{19}$$

Derivace druhého řádu.

Podívejme se konečně na derivaci *druhého* řádu podle x_0. Již víme, že

$$x' = f(x, t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{20}$$

$$u' = \big[\nabla_x f(x, t)\big] u, \qquad u(t_0) = w. \tag{21}$$

kde $x = \varphi(t;t_0,x_0)$, $u = \frac{\partial}{\partial x_0^w}\varphi(t;t_0,x_0)$. Nyní na tuto soustavu aplikujeme postup Věty 4, tj. derivujeme podle počáteční podmínky x_0 ve směru z. Označíme-li

$$y = \frac{\partial}{\partial x_0^z}\varphi(t;t_0,x_0), \tag{22}$$

$$v = \frac{\partial}{\partial x_0^z}\frac{\partial}{\partial x_0^w}\varphi(t;t_0,x_0), \tag{23}$$

(posledně uvedená funkce je hledaná druhá derivace!), jsou příslušné rovnice ve variacích

$$y' = \big[\nabla_x f(x,t)\big]y, \qquad y(t_0) = z, \tag{24}$$

$$v' = \big[\nabla_x^2 f(x,t)\big](u\otimes y) + \big[\nabla_x f(x,t)\big]v, \qquad v(t_0) = 0. \tag{25}$$

Rovnice (25) po složkách:

$$v_i' = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x,t)u_j y_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t)v_j.$$

Zformulujme tyto úvahy jako větu.

Věta 7. *Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je C^2 funkce. Potom řešicí funkce φ úlohy* (6) *je dvakrát diferencovatelná vůči x_0. Hledaná druhá derivace* (23) *je řešením soustavy (20, 21, 24, 25).*

Poznamenejme ještě, že pokud $w = z$, jsou rovnice (21), (24) totožné, tj. $u = y$. To speciálně lze předpokládat ve skalárním případě $n = 1$.

Příklad 4. Spočítejme $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2}(t;0,x_0)$ v bodě $x_0 = 1/2$ pro rovnici

$$x' = e^{2x} - e, \qquad x(0) = x_0.$$

Řešení. Označíme-li $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;0,x_0)$, je příslušná rovnice ve variacích

$$u' = 2e^{2x}u, \qquad u(0) = 1.$$

Tuto rovnici derivujeme opět dle x_0. Při značení $v = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2}(t;0,x_0)$ dostáváme

$$v' = 4e^{2x}u^2 + 2e^{2x}v, \qquad v(0) = 0.$$

Dosazením $x_0 = 1/2$ postupně obdržíme $x \equiv 1/2$, $u = e^{2et}$ a konečně $v = 2e^{2et}(e^{2et} - 1)$. Zapsáno pomocí Taylorova rozvoje:

$$\varphi(t;0,\frac{1}{2}+h) = \frac{1}{2} + he^{2et} + h^2e^{2et}(e^{2et}-1) + o(h^2), \qquad h \to 0.$$

Úlohy na derivaci řešicí funkce.

11. Nechť $x = \phi(t, t_0, x_0)$ je řešení úlohy $x' = f(t, x)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Najděte $\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, 0, 0)$, pokud

(a) $f = 2x + t^2x^2 - x^3$

(b) $f = x + 2tx^2 + x^3$

(c) $f = \sin(-2x) + 2t^2x^2 + x^3$

(d) $f = \ln(1 - x) - x^2 - t^2x^2$

12. Nechť $x = \phi(t, \lambda)$ je řešení úlohy $x' = f(t, x, \lambda)$ s počáteční podmínkou $x(0) = 0$. Najdete $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 0)$, pokud

(a) $f = t + x + \lambda$

(b) $f = x + \lambda(t^2 + x^2)$

(c) $f = -x + \lambda(t + x^2)$

(d) $f = 2tx + \lambda(x^4 + 2t)$

(e) $f = -3x + \lambda(x^2 - t)$

(f) $f(t, x, \lambda) = x - x^2 + \lambda(t + x^3)$

13. Nechť $x = \phi(t, \lambda)$ řeší úlohu $x' = x + \sin x$, $x(0) = \lambda$. Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 0)$ a $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t, 0)$.

14. Nechť $x = \phi(t, \lambda)$ řeší úlohu $x' = \lambda(1 - t) + x - x^2$, $x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 0)$ a $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t, 0)$.

15. Nechť $x = \phi(t, a, b)$ řeší úlohu $x'' = ax - x^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = b$. Najděte $\frac{\partial}{\partial a}\phi(t, 1, 0)$, $\frac{\partial}{\partial b}\phi(t, 1, 0)$.

16. Nechť $x = \phi(t, a, b)$ řeší úlohu $x'' = x + 3\sin x$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$. Najděte $\frac{\partial}{\partial a}\phi(t, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial b}\phi(t, 0, 0)$.

17. Nechť $x(t) = \phi(t, \lambda)$ řeší úlohu $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 2)$, $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t, 2)$.

(a) $f = 2tx + \lambda(2t + x^2)$

(b) $f = x^2 + x + \lambda(1 + t)$

(c) $f = -x^2 + x + \lambda t$

(d) $f = -2tx + \lambda(x^2 - 2t)$

18. Nechť $x = \phi(t, t_0, x_0)$ je řešení úlohy $x' = f(x, t)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Najděte $\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, 0, 0)$, pokud

(a) $f = \frac{x + e^t}{\cos t}$

(b) $f = 2t\sqrt{1 - x^2}$

(c) $f = \frac{x + a}{t + b}(1 - \frac{x + a}{1 + t^2})$, $\quad a, b > 0$

(návod: substituce vhodné mocniny $x + a$)

(d) $f = \frac{x}{t + 1} + \sqrt{(t + 1)^2 - x^2}$

(návod: substituce)

(e) $f = \frac{t}{2 - x}$

(f) $f = \frac{t}{(x - 1)(1 - 2(x - 1)^2)}$

19. Nechť I je otevřený interval, $f = f(x', x, t) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times I)$ a $x(t) = \phi(t, t_0, x_0^1, x_0^2)$ řešením ulohy

$$\begin{aligned} x'' &= f(x', x, t) \\ x(t_0) &= x_0^1 \\ x'(t_0) &= x_0^2. \end{aligned}$$

Odvoďte tvar rovnic pro $u(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^1}\phi(t, t_0, a, b)$ a $v(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^2}\phi(t, t_0, a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Nakonec objev aplikujte na případ $f = 4x' + 21x - 3$, $t_0 = 0$ vypočtením příslušných derivací.

20. Buď I otevřený interval, $f = f(x, t, \lambda) \in C^3(\mathbb{R} \times I \times \mathbb{R})$ a $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ řešením ulohy

$$\begin{aligned} x' &= f(x, t, \lambda) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Odvoďte tvar soustavy rovnic pro výpočet $v(t) = \frac{\partial^3}{\partial t_0 \partial x_0 \partial \lambda}\phi(t, t_0, x_0, \lambda)$. Nezapomeňte u každé rovnice uvést příslušnou počáteční podmínku.

21. Nechť $x(t) = \phi(t, \lambda)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} x' &= \lambda \cos(\lambda\pi)x + t\lambda \\ x(1) &= 0. \end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 1)$, $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t, 1)$.

22. Nechť $x(t) = \phi(t, \lambda)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\lambda} + \lambda \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t, 2)$, $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t, 2)$.

23. Nechť $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + e^{\lambda} t \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \lambda}\phi(t, 0, 0, 1)$.

24. Spočítejte $\frac{\partial}{\partial a}\phi(t, t_0, a, b, c)$, $\frac{\partial}{\partial b}\phi(t, a, b, c)$, $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b}\phi(t, a, b, c)$, kde ϕ je řešicí funkce zadaných rovnic s počátečními podmínkami $x(0) = a$ $x'(0) = b$, $x''(0) = c$.

(a) $x''' = 10x'' - 32x' + 32x$

(b) $x''' = -x'' + 17x' - 15x$

25. Spočítejte parciální a smíšené parciální derivace druhého stupně podle posledních tří proměnných zobrazení $\phi(t,a,b,c)$, kde ϕ je řešicí funkce systému

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ -11 & 2 & 7 \\ -12 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

26. Řešte úlohu

$$x' = f(x,t)$$
$$x(t_0+k) = x_0 + l, \quad k,l \in \mathbb{R}$$

pomocí aproximace

$$\phi(t,t_0+k,x_0+l) = \phi(t,t_0,x_0)+k\frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t,t_0,x_0)+l\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t,t_0,x_0)+R(t,t_0,x_0),$$

kde $R(t,t_0,x_0) = o(k) \wedge R(t,t_0,x_0) = o(l)$ pro všechna $t \in \mathcal{D}(\phi(\cdot,t_0,x_0))$.

(a) $f = x^2\sin(2t)$, $(t_0,x_0) = (\pi,1)$.

(b) $f = x/t + 2t^2(2t^2-5)$, $(t_0,x_0) = (2,0)$.

(c) $f = 2e^x/t^3$, $(t_0,x_0) = (1/\sqrt{e-1},-1)$.

27. Spočtěte $\frac{\partial^2}{\partial x_0^{e_1}\partial x_0^{e_3}}\phi(t,0,(0,1,1))$ systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= -4x_1x_3 \\ x_3' &= -x_1. \end{aligned}$$

28. Spočtěte $\frac{\partial^2}{\partial x_0^{e_1}\partial x_0^{e_2}}\phi(t,1,(1,1))$ systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1x_2 \\ x_2' &= -x_2/x_1. \end{aligned}$$

29. Mějme systém

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2x_3 \\ x_2' &= x_1x_3 \\ x_3' &= x_1x_2. \end{aligned}$$

Při značení $w = (1,1,1)$ spočtěte

(a) $\frac{\partial^2}{\partial (x_0^w)^2}\phi(t,1,(1,1,1))$ (b) * $\frac{\partial^2}{\partial (x_0^w)^2}\phi(t,1,(1,-1,1))$

Řešení.

11) $u = \frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t,0,0)$

(a) $\phi(t,0,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$
$u' = 2u, \quad u(0) = 1$
$u = e^{2t}$

(b) $\phi(t,0,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$
$u' = u$, $u(0) = 1$
$u = e^{t}$

(c) $\phi(t,0,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$
$u' = -2u$, $u(0) = 1$
$u = e^{-2t}$

(d) $\phi(t,0,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = -u, \quad u(0) = 1$
$u = e^{-t}$

12) $u = \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t,0)$

(a) $\phi(t,0)$ nepodstatné
$u' = u + 1, \quad u(0) = 0$
$u = e^{t} - 1$

(b) $\phi(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = u + t^2, \quad u(0) = 0$
$u = -t^2 - 2t - 2 + 2e^{t}$

(c) $\phi(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = -u + t, \quad u(0) = 0$
$u = t - 1 + e^{-t}$

(d) $\phi(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = 2tu + 2t, \quad u(0) = 0$
$u = e^{t^2} - 1$

(e) $\phi(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = -3u - t, \quad u(0) = 0$
$u = \frac{1}{9}(-3t + 1 - e^{-3t})$

(f) $\phi(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = u + t, \quad u(0) = 0$
$u = -t - 1 + e^{t}$

13) $u = \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t,0)$, $v = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t,0)$, $\phi(t,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, $u' = 2u$, $u(0) = 1$, $u = e^{2t}$, $v' = 2v$, $v(0) = 0$, $v \equiv 0$.

14) $u = \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t,0)$, $v = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t,0)$, $\phi(t,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, $u' = u+1-t$, $u(0) = 0$, $u = t$, $v' = \frac{\partial f}{\partial x}v + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}u + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = v - 2t^2$, $v(0) = 0$, $v = 2t^2 + 4t + 4 - 4e^{t}$.

15) $u = \frac{\partial}{\partial a}\phi(t,1,0)$, $v = \frac{\partial}{\partial b}\phi(t,1,0)$, $\phi(t,1,0) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}$, $u'' = -u + 1$, $u(0) = 0, u'(0) = 0$, $u = 1 - \cos t$, $v'' = -v$, $v(0) = 0, v'(0) = 1$, $v = \sin t$.

16) $u = \frac{\partial}{\partial a}\phi(t,0,0)$, $v = \frac{\partial}{\partial b}\phi(t,0,0)$, $\phi(t,0,0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, $u'' = 4u$, $u(0) = 1, u'(0) = 0$, $u = \cosh(2t)$, $v'' = 4v$, $v(0) = 0, v'(0) = 1$, $v = \frac{\sinh(2t)}{2}$.

17) $u = \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(t,0,0,0)$, $v = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\phi(t,0,0,0)$, pro rovnici k výpočtu v viz výsledky úlohy 14.

(a) $\phi(t,0,0,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = 2tu + 2t, \quad u(0) = 0$
$u = e^{t^2} - 1$
$v' = -2tv, \quad v(0) = 0$
$v \equiv 0$

(b) $\phi(t,0,0,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = u + 1 + t, \quad u(0) = 0$
$u = 2e^t - t - 2$
$v' = v + 2(2e^t - t - 2)^2, \quad v(0) = 0$
$v = -2(t^2+6t+10) - 4t(t+4)e^t + 12e^t + 8e^{2t}$

(c) $\phi(t,0,0,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = u + t, \quad u(0) = 0$
$u = e^t - t - 1$
$v' = v - 2(e^t - t - 1)^2, \quad v(0) = 0$
$v = 2(t^2 + 4t + 5) + 2t(t+2)e^t - 8e^t - 2e^{2t}$

(d) $\phi(t,0,0,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$
$u' = -2tu - 2t, \quad u(0) = 0$
$u = e^{-t^2} - 1$
$v' = -2tv, \quad v(0) = 0$
$v \equiv 0$

18) (a) $\phi(t,0,0)$ nepodstatné, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $u' = u/\cos t$, $u(0) = 1$, $u = \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4)$.

(b) $\phi(t,0,0) = \sin(t^2)$, $t \in (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, $u' = -2t\operatorname{tg}(t^2)u$, $u(0) = 1$, $u = \cos t^2$.

(c) $\phi(t,0,0) = \frac{t+b}{\operatorname{arctg} t+b/a} - a$, $t > -b$, $u' = (\frac{1}{t+b} - \frac{2}{(1+t^2)(\operatorname{arctg} t+b/a)})u$, $u(0) = 1$, $u = \frac{b}{a^2}\frac{t+b}{(\operatorname{arctg} t+b/a)^2}$.

(d) $\phi(t,0,0) = (t+1)\sin t$, $t \in (-1, \pi/2)$, $u' = \left(\frac{1}{t+1} - \operatorname{tg} t\right)u$, $u(0) = 1$, $u = (t+1)\cos t$.

(e) řešením jsou právě body (t,x) splňující vztah $t^2 + (x-2)^2 = 4$; $u' = \frac{t}{4-t^2}u$, $u(0) = 1$, $u = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}$.

(f) řešením jsou právě body (t,x) splňující vztah $t^2 + (x-1)^4 - (x-1)^2 = 0$;

$$\nabla_x f = t\left(\frac{4}{(1-2(x-1)^2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2(1-2(x-1)^2)}\right),$$

takže stačí vyjádřit $(\phi(t,0,0)-1)^2 = \sqrt{1/4 - t^2} + 1/2$, $t \in (-1/2, 1/2)$,

$$u' = \left(\frac{4t}{1-4t^2} - \frac{2t}{\sqrt{1-4t^2}(\sqrt{1-4t^2}+1)}\right)u, \quad u(0) = 1,$$

$u = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4t^2}}{2-8t^2}}$.

19) $u'' = \frac{\partial f}{\partial x'}u' + \frac{\partial f}{\partial x}u$, $u(t_0) = 1, u'(t_0) = 0$, $v'' = \frac{\partial f}{\partial x'}v' + \frac{\partial f}{\partial x}v$, $v(t_0) = 0, v'(t_0) = 1$. V případě uvedeného f: $u = \frac{3}{10}e^{7t} + \frac{7}{10}e^{-3t}, v = \frac{1}{10}e^{7t} - \frac{1}{10}e^{-3t}$.

20) Pro lepší přehlednost zde označujme parciální derivace pomocí dolních indexů. Abychom nalezli $\phi_{t_0 x_0 \lambda}$, je zpravidla nutné vyřešit následující systém:

$$\begin{aligned}
x' &= f, \qquad x(t_0) = x_0 \\
\phi'_{x_0} &= f_x \phi_{x_0}, \qquad \phi_{x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 1 \\
\phi'_{\lambda} &= f_x \phi_{\lambda} + f_{\lambda}, \qquad \phi_{\lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0 \\
\phi'_{t_0} &= f_x \phi_{x_0}, \qquad \phi_{t_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = -f(x_0, t_0, \lambda) \\
\phi'_{x_0 \lambda} &= f_x \phi_{x_0 \lambda} + f_{xx} \phi_{x_0} \phi_{\lambda} + f_{x\lambda} \phi_{x_0} \\
\phi_{x_0 \lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) &= 0 \\
\phi'_{t_0 x_0} &= f_x \phi_{t_0 x_0} + f_{xx} \phi_{x_0} \phi_{t_0} \\
\phi_{t_0 x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) &= -f_x(x_0, t_0, \lambda) \\
\phi'_{t_0 \lambda} &= f_x \phi_{t_0 \lambda} + f_{xx} \phi_{t_0} \phi_{\lambda} + f_{x\lambda} \phi_{t_0} \\
\phi_{t_0 \lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) &= -f_{\lambda}(x_0, t_0, \lambda) \\
\phi'_{t_0 x_0 \lambda} &= f_x \phi_{t_0 x_0 \lambda} + f_{xx}(\phi_{x_0 \lambda} \phi_{t_0} + \phi_{t_0 x_0} \phi_{\lambda} + \phi_{t_0 \lambda} \phi_{x_0}) \\
&\quad + f_{x\lambda} \phi_{t_0 x_0} + f_{xx\lambda} \phi_{t_0} \phi_{x_0} + f_{xxx} \phi_{t_0} \phi_{x_0} \phi_{\lambda} \\
\phi_{t_0 x_0 \lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) &= -f_{x\lambda}(x_0, t_0, \lambda)
\end{aligned}$$

21) $u(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi(t, 1)$, $v(t) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \phi(t, 1)$, $\phi(t, 1) = t - 1$, $u' = -u + 1$, $u(1) = 0$, $u = 1 - e^{1-t}$, $v' = -v - 2 + 2e^{1-t} + \pi^2(t - 1)$, $v(1) = 0$, $v = e^{1-t}(2t + \pi^2) + \pi^2 t - 2 - 2\pi^2$.

22) $u(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi(t, 2)$, $v(t) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \phi(t, 2)$, $\phi(t, 2) = 4(e^{t/2} - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $u' = \frac{u}{2} + 2 - e^{t/2}$, $u(0) = 0$, $u = -4 + 4e^{t/2} - te^{t/2}$, $v' = \frac{v}{2} + 1 - e^{t/2} + \frac{t}{2} e^{t/2}$, $v(0) = 0$, $v = -2 + 2e^{t/2} - te^{t/2} + \frac{t^2}{4} e^{t/2}$.

23) $u(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \lambda} \phi(t, 0, 0, 1)$, $v(t) = \frac{\partial}{\partial x_0} \phi(t, 0, 0, 1)$, $w(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi(t, 0, 0, 1)$. Prvně odvodíme rovnici

$$\begin{aligned}
u' &= f_x u + f_{xx} v w + f_{x\lambda} v \\
u(0) &= 0
\end{aligned}$$

$v' = v$, $v(0) = 1$, $v = e^t$; w není nutno znát; $u' = u + e^t$, $u(0) = 0$, $u = te^t$.

24) $u(t) = \frac{\partial}{\partial a} \phi(t, a, b, c)$, $v(t) = \frac{\partial}{\partial b} \phi(t, a, b, c)$, $w(t) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \phi(t, a, b, c)$,

(a) $u''' = 10u'' - 32u' + 32u$,
$u(0) = 1, u'(0) = u''(0) = 0$
$u = 4e^{2t} - 3e^{4t} + 4te^{4t}$
$v''' = 10v'' - 32v' + 32v$,
$v'(0) = 1, v(0) = v''(0) = 0$
$v = -2e^{2t} + 2e^{4t} - 3te^{4t}$
$w''' = 10w'' - 32w' + 32w$,
$w(0) = w'(0) = w''(0) = 0$,
$w \equiv 0$

(b) $u''' = -u'' + 17u' - 15u$,
$u(0) = 1, u'(0) = u''(0) = 0$
$u = \frac{5}{4}e^{t} - \frac{5}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-5t}$
$v''' = -v'' + 17v' - 15v$
$v'(0) = 1, v(0) = v''(0) = 0$
$v = -\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{12}e^{-5t}$
$w''' = -w'' + 17w' - 15w$,
$w(0) = w'(0) = w''(0) = 0$,
$w \equiv 0$

25) ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c řeší zadanou soustavu s počátečními podmínkami $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Po spočtení vlastních čísel a jim příslušných vlastních vektorů dostáváme

$$\phi_a = -e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \cos(2t)\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \sin(2t)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi_b = \cos(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi_c = e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \cos(2t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\phi_{ab} = \phi_{ac} = \phi_{bc} \equiv 0$

26) $u(t) = \frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t, t_0, x_0)$, $v(t) = \frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, t_0, x_0)$;

(a) $\phi(t, \pi, 1) = \frac{2}{1+\cos 2t}$, $t \in (\pi/2, 3\pi/2)$,

$u' = \frac{4\sin 2t}{1+\cos 2t}u, \quad u(\pi) = -f(1, \pi) = 0$

$u \equiv 0$

$v' = \frac{4\sin 2t}{1+\cos 2t}v, \quad v(\pi) = 1$

$v = \left(\frac{2}{1+\cos 2t}\right)^2$

(b) $\phi(t, 2, 0) = t(t^2 - 1)(t^2 - 4)$, $t > 0$
$u' = \frac{1}{t}u, \quad u(2) = -f(0, 2) = -24$
$u = -12t$
$v' = \frac{1}{t}v, \quad v(2) = 1$
$v = t/2$

(c) $\phi(t, \frac{1}{\sqrt{e-1}}, -1) = \ln(\frac{t^2}{1+t^2}),\ t > 0$

$u' = \frac{2}{t(1+t^2)}u,$

$u(\frac{1}{\sqrt{e-1}}) = -f(-1, \frac{1}{\sqrt{e-1}}) = -\frac{2}{e(e-1)^{2/3}}$

$u = -\frac{2t^2}{(e-1)^{2/3}(1+t^2)}$

$v' = \frac{2}{t(1+t^2)}v, \quad v(\frac{1}{\sqrt{e-1}}) = 1$

$v = \frac{et^2}{1+t^2}$

27)

$$\phi(t,0,(0,1,1)) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^{e_1}}\phi(t,0,(0,1,1))$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^{e_3}}\phi(t,0,(0,1,1))$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^{e_1}\partial x_0^{e_3}}\phi(t,0,(0,1,1))$$

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4\cos t & 0 & -4\sin t \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\sin(2t) \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4\cos t & 0 & -4\sin t \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos(2t) - 2 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4\cos t & 0 & -4\sin t \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4\cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

28)

$$\phi(t, 1, (1,1)) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^{e_2}} \phi(t, 1, (1,1))$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^{e_1}} \phi(t, 1, (1,1))$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^{e_1} \partial x_0^{e_2}} \phi(t, 1, (1,1))$$

$$u' = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t^3 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 1 - 1/t^2 \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t^3 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}$$

$$w' = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t^3 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/t^4 \\ (t^2 + 1/t^2)/2 \end{pmatrix}, \qquad w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \frac{1}{30t^5} \begin{pmatrix} t^{10} + 8t^7 - 15t^6 + 14t^5 - 8t^2 \\ 4t^8 + 8t^5 - 14t^3 + 2 \end{pmatrix}$$

29) (a)

$$\phi(t, 1, (1,1,1)) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^{w}} \phi(t, 1, (1,1,1))$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial^2}{\partial (x_0^w)^2}\phi(t, 1, (1,1,1))$$

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1/t & 1/t \\ 1/t & 0 & 1/t \\ 1/t & 1/t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad u(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & 1/t & 1/t \\ 1/t & 0 & 1/t \\ 1/t & 1/t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + 2t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \frac{2}{3}(t^5 - t^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\phi(t, 1, (1, -1, 1)) = \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial}{\partial x_0^w}\phi(t, 1, (1,-1,1))$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}(t) = \frac{\partial^2}{\partial (x_0^w)^2}\phi(t, 1, (1,-1,1))$$

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1/t & -1/t \\ 1/t & 0 & 1/t \\ -1/t & 1/t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad u(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{1}{3t^2}\begin{pmatrix} 2t^3 + 1 \\ 4t^3 - 1 \\ 2t^3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & 1/t & -1/t \\ 1/t & 0 & 1/t \\ -1/t & 1/t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \frac{2}{9t^4}(2t^3+1)\begin{pmatrix} 4t^3 - 1 \\ 2t^3 + 1 \\ 4t^3 - 1 \end{pmatrix},$$

$$w(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \frac{2}{45t^3}\begin{pmatrix} 14t^6 - 10t^3 - 9t + 5 \\ 16t^6 - 20t^3 + 9t - 5 \\ 14t^6 - 10t^3 - 9t + 5 \end{pmatrix}$$