

Teoretičtější úlohy

19. Dokažte Tvrzení 1.

20. Načrtněte chování soustavy $x' = Ax$ s konstantní maticí A , pokud A je podobná matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Rozlište případy: (a) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, (b) $0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

21. Vypočtěte exponenciálu matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(pokud možno bez rutinního přechodu na Jordanův tvar). Načrtněte chování řešení soustavy s výše uvedenou maticí; jak se liší případy $a > 0$, $a < 0$ a $a = 0$?

22. (a) Spočítejte přímo z definice e^{tA} , víte-li, že $A^2 = -I$.

(b) Ukažte, že $A^2 = -I$ implikuje $\sigma(A) \subset \{i, -i\}$.

(c) Pomocí (a) určete fundamentální matici soustavy $u' = Au$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

23. (a) Spočítejte přímo z definice e^{tA} , víte-li, že $A^2 = c^2I$, $c > 0$.

(b) Ukažte, že $A^2 = c^2I$ implikuje $\sigma(A) \subset \{c, -c\}$.

(c) Pomocí bodu (a) najděte fundamentální matici pro systém $u' = Au$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Vypočítejte

$$\int_0^\infty e^{tA} dt,$$

víte-li, že matice A má pouze záporná vlastní čísla. (Proč konverguje tento integrál?)

25. Ukažte, že $[\sin(tA)]' = A \cos(tA)$ a $[\cos(tA)]' = -A \sin(tA)$.

26. Najděte všechna řešení soustavy $Y'' = AY$ pro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pomocí maticového sinu a cosinu.