Řešení

19) Plyne snadno z tvaru e^J pro Jordanovu buňku J.

20) Řešení je lineární kombinací $e^{\lambda_i t}v$, kde v je odpovídající vlastní vektor.

21) $e^{a+ib} = e^a[\cos b + i \sin b]$; matice „reprezentuje" číslo $a + ib$. Výsledek tedy bude

$$\begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}$$

Pro $a < 0$ bude maticová exponenciála konvergovat k 0, pro $a = 0$ bude omezená a pro $a > 0$ neomezená.

22) (a) $e^{tA} = (\cos t)I + (\sin t)A$. (b) uvažte, že $\lambda \in \sigma(M)$ právě když existuje nenulový vektor v tak, že $Av = \lambda v$. (c) Výpočtem ověřte, že $A^2 = -I$. Poté z bodu (a) plyne, že fundamentální matice $\phi(t)$ je $e^{tA} = I\cos t + A\sin t$, tedy:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t & 8\sin t & -12\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t & 4\sin t & -8\sin t \\ 0 & 0 & \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

23) (a) $e^{tA} = \cosh(tc)I + c^{-1}\sinh(tc)A$
(b) $\sigma(c^2 I) = \{c^2\}$. Využijte větu o obrazu spektra s funkcí $f(x) = x^2$. Pak $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)) = \sigma(c^2 I) = \{c^2\}$, což implikuje, že $\sigma(A) \subset \{-c, c\}$.
(c) Výpočtem ověřte, že $A^2 = 36I$. Fundamentální matice je pak dle bodu (a) rovna matici $e^{tA} = I\cosh(6t) + \frac{1}{6}A\sinh(6t)$, tedy:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cosh 6t + \frac{1}{2}\sinh 6t & \frac{1}{2}\sinh 6t & -\frac{1}{2}\sinh 6t \\ \sinh 6t & \cosh 6t & \sinh 6t \\ -\frac{1}{2}\sinh 6t & \frac{1}{2}\sinh 6t & \cosh 6t + \frac{1}{2}\sinh 6t \end{pmatrix}.$$

24) Vypočtěte nejprve pro matici 1×1, tj. záporné reálné číslo. To vám napoví výsledek. Definice: $B = A^{-1}$, právě když $BA = I$.

25) Stejně jako v úvodu kapitoly 1.2 ukažte, že lze derivovat řadu vyjadřující sinus resp. cosinus člen po členu. Po zderivování stačí vhodně vytknout a upravit.

26) Na základě cvičení 25 ukažte, že $(\sin tB)'' = -B^2 \sin tB$ a $(\cos tB)'' = -B^2 \cos tB$ pro libovolnou matici B. Nalezne-li se matice B taková, že $-B^2 = A$, bude $\{\sin Bt, \cos Bt\}$ tvořit fundamentální systém řešení zadané soustavy. Zmíněnou matici B lze nalézt např. pomocí Cauchyho vzorce (zmíněného ve cvičení 10), stačí volit $f(z) = \sqrt{-z}$ a spočítat $f(A)$. Pak $B = f(A) = \sqrt{-A}$ a vyjde tedy

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A pak fundamentální systém tvoří matice:

$$\sin Bt = \begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}t & -\frac{t}{2\sqrt{2}}\cos\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sin\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{a } \cos Bt = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t & \frac{t}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

které lze vypočítat například pomocí Cauchyho vzorců:
$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-1}dz$,
$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-2}dz$,
stejným postupem jako ve cvičení 10, jenom místo funkce exp uvažujte funkce sin resp. cos.