Řešení

1) (a) $Av = \lambda v$, tedy $A^k v = \lambda^k v$, tedy $(e^A)v = \dots$. (b) Pomocí Jordanova tvaru. Jde to i bez něj?

2) Pomocí Jordanova tvaru nebo Liouvilleovy formule.

3) (a) Dosazením. (b) Uvažte, že $\exp(x - x^2/2 + x^3/3 + \dots) = 1 + x$ pro $x \in (0,1)$, a argumentujte možností přerovnat absolutně konvergentní řady. (c)

$$B = V \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix} V^{-1},$$

kde V je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory matice A a buňka C_i se rovná

$$-\begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m} & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{1} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-1}}{m} & \dots & \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r-1} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-r+1}}{m} \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m} & \dots & \sum_{m=r-1}^{\infty} \binom{m}{r-2} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-r+2}}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m}, \end{pmatrix}$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice $A - I$.

4) (a) Matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla -2 a 4, a proto neexistuje reálná matice B, že $e^B = A$.

(b) Kvůli konvergenci taylorovy řady funkce $\ln(1+x)$ na intervalu $(0,2)$ je vhodné napsat matici A takto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ a spočítat exponenciálu zvlášť pro obě matice (přičemž první jde triviálně a druhá pomocí výsledku cvičení 3c). Výsledek pak je

$$B = \begin{pmatrix} \ln 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & 2e^{-1} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a výsledek je:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & 2e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-2} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ jsou 0 a 2 a tedy neexistuje matice B, že $e^B = A$ (neex. $c \in \mathbb{R}$, že $e^c = 0$).

5) Stačí uvažovat Jordanovu buňku. V případě nulových vlastních čísel odmocnina matice obecně neexistuje.

6) (a) Stačí postupovat obdobně jako v případě exponenciály.
(b) Stačí využít vzorce pro násobení řad, tj.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}b_m\right).$$

(c) Tvrzení platí pro dvojice matic splňující $AB = BA$. V důkazu nejprve rozepsáním z definice exponenciály ukažte, že $e^{iB} = \cos B + i \sin B$ a následně zbývá ukázat, že $e^{A+iB} = e^A e^{iB}$. K tomu využijte vzorec

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^{n-m} B^m,$$

který platí, pokud $AB = BA$. Pokud $AB \neq BA$, vzorec platit nemusí. Ověřte, že tomu tak je u matic

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Platí pro dvojice matic splňující $AB = BA$. V důkazu se použije vzorec pro násobení řad (viz. bod (b)) a binomická věta (viz. bod (c)), kde se využije komutativity matic A a B.

7) a) Výpočtem ověřte, že $A^3 = A$ a pak již snadno spočtěte, že $\sin A$ je roven matici

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin 1 \\ \sin 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Výpočtem ověřte, že $A^3 = 0$ a tedy snadno: $\sin A = A$.

8) M je ortogonální právě když $MM^T = I$.

9) Plyne z výpočtu pomocí Jordanova kanonického tvaru.

10) (a) Využijte vzorce $(I - A/z) = \sum_{k=0}^{\infty}(A/z)^k$, zaměňte sumu a integrál a použijte Cauchyův vzorec pro k-tou derivaci funkce. (b) Využijte vzorce pro inverzi matice 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Pomocí něho spočtěte $(zI - A)^{-1}$ pro obě zadané matice. U první resp. druhé vyjde:

$$\begin{pmatrix} \frac{z}{z^2-1} & \frac{1}{z^2-1} \\ \frac{1}{z^2-1} & \frac{z}{z^2-1} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2-1} & \frac{1}{z^2-1} \\ 0 & \frac{z+1}{z^2-1} \end{pmatrix}.$$

Následně dosazením do formule pro výpočet exponenciály z předchozího bodu a aplikací zmíněného Cauchyho vzorce zvlášť na každou složku výsledné inverzní matice (za pomoci rozkladu na parciální zlomky) dopočítáte, že exponenciála od první resp. druhé matice je:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e + e^{-1}) & \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \\ \frac{1}{2}(e - e^{-1}) & \frac{1}{2}(e + e^{-1}) \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} e & \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$