Maticová exponenciála a jiné maticové funkce

Motivace: Již víte, že řešením rovnice

$$y' = ay,$$

jsou funkce $y(t) = c \cdot e^{at}$, tj. exponenciály. Pro tuto funkci platí, že $y(0) = c$, tj. konstanta c je počáteční podmínka v bodě $t = 0$. Analogicky by mohlo platit, že řešení systému rovnic, který můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$Y' = AY \tag{1}$$

(viz. kapitola o soustavách lineárních rovnic), bude $Y(t) = e^{tA}C$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice, Y je neznámá funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ a $C \in \mathbb{R}^n$ je vektor počátečních podmínek. Exponenciálu od matice můžeme definovat jako

$$e^B := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}, \tag{2}$$

opět využíváme analogie s reálnou exponenciálou.

Než si ukážeme, že při takovéto definici skutečně získáme diferencovatelnou funkci, která je řešením diferenciální rovnice (1), řekneme si, jak se exponenciála od matice (tj. součet nekonečné řady (2)) počítá.

Vlastnosti a výpočet maticové exponenciály

Nejprve je třeba říci, že řada (2) konverguje pro každou matici B. Ke zdůvodnění tohoto tvrzení zaveďme tzv. *operátorovou normu* matice:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \ x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \le 1\}, \qquad \text{kde} \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pro tuto normu platí $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, tedy $\|A^m\| \le \|A\|^m$. Řada (2) tedy konverguje pro každou matici B, protože platí

$$\left\| \sum_{m=k}^{l} \frac{B^m}{m!} \right\| \le \sum_{m=k}^{l} \frac{\|B^m\|}{m!} \le \sum_{m=k}^{l} \frac{\|B\|^m}{m!} \le \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\|B\|^m}{m!} \to 0 \tag{3}$$

pro $k \to \infty$, tj. posloupnost částečných součtů splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. A nyní k výpočtu exponenciály.

Nechť $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak existuje Jordanův kanonický tvar $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice B, tj. platí

$$B = VJV^{-1},$$

kde J se skládá z Jordanových buněk $J_1, \dots, J_k$ a sloupce matice V tvoří vlastní vektory, případně řetězce vlastních vektorů. Pak ovšem platí $B^m = VJ^mV^{-1}$. Nepotřebujeme tedy umět umocnit matici B, stačí nám umocňovat její Jordanův tvar. A protože platí

$$J^2 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k^2 \end{pmatrix},$$

stačí umět umocňovat Jordanovu buňku.

Pro Jordanovu buňku J_i příslušnou vlastnímu číslu λ_i platí

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + D, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

můžeme tedy psát

$$J_i^m = (\lambda_i I + D)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda_i^{m-k} D^k,$$

kde binomickou větu můžeme použít, protože matice I a D komutují ($ID = DI$). Umocňováním matice D se diagonála jedniček posouvá vždy o řádek výš, tj. $(D^k)_{ij} = 1$ pro $j = i + k$ a $(D^k)_{ij} = 0$ jinak (důkaz snadno indukcí). Speciálně tedy, je-li velikost buňky r, pak D^{r-1} má jedničku v pravém horním rohu a jinak samé nuly a $D^k = 0$ pro $k \geq r$. Máme tedy pro $m \geq r$ (kde r je velikost buňky)

$$J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda_i^{m-2} & \dots & \binom{m}{r-1}\lambda_i^{m-r+1} \\ 0 & \lambda_i^m & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} & \dots & \binom{m}{r-2}\lambda_i^{m-r+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^m \end{pmatrix}.$$

Pro $m < r$ jsou záporné mocniny λ_i v předcházejícím výrazu nahrazeny nulami.

Dáme-li nyní všechny informace dohromady, máme

$$e^B = e^{VJV^{-1}} = Ve^JV^{-1} = V\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k^m \end{pmatrix}V^{-1} =$$

$$V\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_k^m \end{pmatrix}V^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_k} \end{pmatrix}V^{-1},$$

kde e^{J_i} se rovná

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} & \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-2}}{(m-2)!2!} & \dots & \sum_{m=r}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-r+1}}{(m-r+1)!(r-1)!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} & \dots & \sum_{m=r-1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-r+2}}{(m-r+2)!(r-2)!} \\ 0 & 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \frac{e^{\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}.$$

A tím je výpočet exponenciály od matice hotov. Předcházející výpočty nyní uplatníme v následujícím příkladu.

Příklad 1. Vypočtěte e^A pro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Vypočteme vlastní čísla:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2,$$

tj. $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -2$. Vlastní číslo -2 má vlastní vektor $(1, 0, 0)$, vlastní číslo 1 má vlastní vektor $(1, 0, 1)$, k němuž najdeme „pseudovlastní vektor" splňující $(A - I)v = (1, 0, 1)$, např. $v = (1, 1, 0)$. Máme tedy

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $A = VJV^{-1}$. Potom

$$e^A = Ve^J V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} + 2e & -e^{-2} + e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & e & e \end{pmatrix}$$