Maticová exponenciála a jiné maticové funkce

Motivace: Již víte, že řešením rovnice

$$y' = ay,$$

jsou funkce $y(t) = c \cdot e^{at}$, tj. exponenciály. Pro tuto funkci platí, že $y(0) = c$, tj. konstanta c je počáteční podmínka v bodě $t = 0$. Analogicky by mohlo platit, že řešení systému rovnic, který můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$Y' = AY \tag{1}$$

(viz. kapitola o soustavách lineárních rovnic), bude $Y(t) = e^{tA}C$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice, Y je neznámá funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ a $C \in \mathbb{R}^n$ je vektor počátečních podmínek. Exponenciálu od matice můžeme definovat jako

$$e^B := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}, \tag{2}$$

opět využíváme analogie s reálnou exponenciálou.

Než si ukážeme, že při takovéto definici skutečně získáme diferencovatelnou funkci, která je řešením diferenciální rovnice (1), řekneme si, jak se exponenciála od matice (tj. součet nekonečné řady (2)) počítá.

Vlastnosti a výpočet maticové exponenciály

Nejprve je třeba říci, že řada (2) konverguje pro každou matici B. Ke zdůvodnění tohoto tvrzení zaveďme tzv. *operátorovou normu* matice:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \ x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \le 1\}, \qquad \text{kde} \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pro tuto normu platí $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, tedy $\|A^m\| \le \|A\|^m$. Řada (2) tedy konverguje pro každou matici B, protože platí

$$\left\| \sum_{m=k}^{l} \frac{B^m}{m!} \right\| \le \sum_{m=k}^{l} \frac{\|B^m\|}{m!} \le \sum_{m=k}^{l} \frac{\|B\|^m}{m!} \le \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\|B\|^m}{m!} \to 0 \tag{3}$$

pro $k \to \infty$, tj. posloupnost částečných součtů splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. A nyní k výpočtu exponenciály.

Nechť $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak existuje Jordanův kanonický tvar $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice B, tj. platí

$$B = VJV^{-1},$$

kde J se skládá z Jordanových buněk $J_1, \ldots, J_k$ a sloupce matice V tvoří vlastní vektory, případně řetězce vlastních vektorů. Pak ovšem platí $B^m = VJ^mV^{-1}$. Nepotřebujeme tedy umět umocnit matici B, stačí nám umocňovat její Jordanův tvar. A protože platí

$$J^2 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k^2 \end{pmatrix},$$

stačí umět umocňovat Jordanovu buňku.

Pro Jordanovu buňku J_i příslušnou vlastnímu číslu λ_i platí

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + D, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

můžeme tedy psát

$$J_i^m = (\lambda_i I + D)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda_i^{m-k} D^k,$$

kde binomickou větu můžeme použít, protože matice I a D komutují ($ID = DI$). Umocňováním matice D se diagonála jedniček posouvá vždy o řádek výš, tj. $(D^k)_{ij} = 1$ pro $j = i + k$ a $(D^k)_{ij} = 0$ jinak (důkaz snadno indukcí). Speciálně tedy, je-li velikost buňky r, pak D^{r-1} má jedničku v pravém horním rohu a jinak samé nuly a $D^k = 0$ pro $k \geq r$. Máme tedy pro $m \geq r$ (kde r je velikost buňky)

$$J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda_i^{m-2} & \ldots & \binom{m}{r-1}\lambda_i^{m-r+1} \\ 0 & \lambda_i^m & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} & \ldots & \binom{m}{r-2}\lambda_i^{m-r+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{m}{1}\lambda_i^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i^m \end{pmatrix}.$$

Pro $m < r$ jsou záporné mocniny λ_i v předcházejícím výrazu nahrazeny nulami.

Dáme-li nyní všechny informace dohromady, máme

$$e^B = e^{VJV^{-1}} = Ve^JV^{-1} = V\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k^m \end{pmatrix} V^{-1} =$$

$$V\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_k^m \end{pmatrix} V^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_k} \end{pmatrix} V^{-1},$$

kde e^{J_i} se rovná

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} & \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-2}}{(m-2)!2!} & \dots & \sum_{m=r}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-r+1}}{(m-r+1)!(r-1)!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} & \dots & \sum_{m=r-1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-r+2}}{(m-r+2)!(r-2)!} \\ 0 & 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{m-1}}{(m-1)!1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \frac{e^{\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}.$$

A tím je výpočet exponenciály od matice hotov. Předcházející výpočty nyní uplatníme v následujícím příkladu.

Příklad 1. Vypočtěte e^A pro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Vypočteme vlastní čísla:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

tj. $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -2$. Vlastní číslo -2 má vlastní vektor $(1,0,0)$, vlastní číslo 1 má vlastní vektor $(1,0,1)$, k němuž najdeme „pseudovlastní vektor" splňující $(A-I)v = (1,0,1)$, např. $v = (1,1,0)$. Máme tedy

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $A = VJV^{-1}$. Potom

$$e^A = Ve^JV^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2}+2e & -e^{-2}+e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & e & e \end{pmatrix}$$

Úlohy

1. (a) Nechť v je vlastní vektor matice A, příslušný vlastnímu číslu λ. Potom v je též vlastní vektor matice e^A, příslušný vlastnímu číslu e^λ.
(b) Dokažte větu o obrazu spektra: $\sigma(e^A) = \{e^\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

2. Dokažte, že $\det e^A = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = e^{\operatorname{tr} A}$, kde λ_i jsou vlastní čísla A, a $\operatorname{tr} A$ je stopa (součet diagonálních prvků).

3. Logaritmus matice. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(a) Pokud $A^3 = 0$ a $L := A - A^2/2$, pak $e^L = I + A$.
(b) Konverguje-li řada $L := A - A^2/2 + A^3/3 + \ldots$, potom je $e^L = I + A$.
* (c) Pro danou matici A najděte matici B tak, že $A = e^B$.

4. Pro následující matice A najděte matice B takové, že $A = e^B$ (s využitím výsledku předchozí úlohy).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Je dána matice A. Existuje vždy B tak, že $B^2 = A$?
(b) Najděte odmocninu matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Pro libovolnou čtvercovou matici A definujme ($A^0 = I$)

$$\sin A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \qquad \cos A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

(a) Ukažte, že uvedené řady konvergují.
(b) Ukažte, že $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = I$.
(c) Platí $e^{A+iB} = e^A(\cos B + i \sin B)$ pro všechny dvojice matic A, B nebo jen pro některé?
(d) Platí $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ pro všechny dvojice matic A, B nebo jen pro některé?

7. Vypočtěte $\sin A$ (bez použití Jordanova tvaru) pro následující matice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Nechť A je antisymetrická (tj. $A^T = -A$.) Potom e^A je ortogonální.

9. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má jednonásobná vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Buď P takový polynom, že $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Pak $e^A = P(A)$. Dokažte.

10. !! Cauchyův vzorec říká $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{-1} dz$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem a.
(a) Ukažte, že

$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^z (zI - A)^{-1} dz,$$

kde γ je taková kružnice se středem v 0 a poloměru větším než $\|A\|$.
(b) Spočtěte touto metodou e^A pro následující matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

1) (a) $Av = \lambda v$, tedy $A^k v = \lambda^k v$, tedy $(e^A)v = \ldots$. (b) Pomocí Jordanova tvaru. Jde to i bez něj?

2) Pomocí Jordanova tvaru nebo Liouvilleovy formule.

3) (a) Dosazením. (b) Uvažte, že $\exp(x - x^2/2 + x^3/3 + \ldots) = 1 + x$ pro $x \in (0,1)$, a argumentujte možností přerovnat absolutně konvergentní řady.

(c)

$$B = V \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix} V^{-1},$$

kde V je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory matice A a buňka C_i se rovná

$$-\begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m} & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{1} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-1}}{m} & \dots & \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r-1} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-r+1}}{m} \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m} & \dots & \sum_{m=r-1}^{\infty} \binom{m}{r-2} \frac{(-1)^m \lambda_i^{m-r+2}}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m}{0} \frac{(-1)^m \lambda_i^m}{m}, \end{pmatrix}$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice $A - I$.

4) (a) Matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla -2 a 4, a proto neexistuje reálná matice B, že $e^B = A$.
(b) Kvůli konvergenci taylorovy řady funkce $\ln(1 + x)$ na intervalu $(0, 2)$ je vhodné napsat matici A takto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ a spočítat exponenciálu zvlášť pro obě matice (přičemž první jde triviálně a druhá pomocí výsledku cvičení 3c). Výsledek pak je

$$B = \begin{pmatrix} \ln 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & 2e^{-1} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a výsledek je:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & 2e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-2} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ jsou 0 a 2 a tedy neexistuje matice B, že $e^B = A$ (neex. $c \in \mathbb{R}$, že $e^c = 0$).

5) Stačí uvažovat Jordanovu buňku. V případě nulových vlastních čísel odmocnina matice obecně neexistuje.

6) (a) Stačí postupovat obdobně jako v případě exponenciály.
(b) Stačí využít vzorce pro násobení řad, tj.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}b_m\right).$$

(c) Tvrzení platí pro dvojice matic splňující $AB = BA$. V důkazu nejprve rozepsáním z definice exponenciály ukažte, že $e^{iB} = \cos B + i \sin B$ a následně zbývá ukázat, že $e^{A+iB} = e^A e^{iB}$. K tomu využijte vzorec

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^{n-m}B^m,$$

který platí, pokud $AB = BA$. Pokud $AB \neq BA$, vzorec platit nemusí. Ověřte, že tomu tak je u matic

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Platí pro dvojice matic splňující $AB = BA$. V důkazu se použije vzorec pro násobení řad (viz. bod (b)) a binomická věta (viz. bod (c)), kde se využije komutativity matic A a B.

7) a) Výpočtem ověřte, že $A^3 = A$ a pak již snadno spočtěte, že $\sin A$ je roven matici

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin 1 \\ \sin 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Výpočtem ověřte, že $A^3 = 0$ a tedy snadno: $\sin A = A$.

8) M je ortogonální právě když $MM^T = I$.

9) Plyne z výpočtu pomocí Jordanova kanonického tvaru.

10) (a) Využijte vzorce $(I - A/z) = \sum_{k=0}^{\infty}(A/z)^k$, zaměňte sumu a integrál a použijte Cauchyův vzorec pro k-tou derivaci funkce. (b) Využijte vzorce pro inverzi matice 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Pomocí něho spočtěte $(zI - A)^{-1}$ pro obě zadané matice. U první resp. druhé vyjde:

$$\begin{pmatrix} \frac{z}{z^2-1} & \frac{1}{z^2-1} \\ \frac{1}{z^2-1} & \frac{z}{z^2-1} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2-1} & \frac{1}{z^2-1} \\ 0 & \frac{z+1}{z^2-1} \end{pmatrix}.$$

Následně dosazením do formule pro výpočet exponenciály z předchozího bodu a aplikací zmíněného Cauchyho vzorce zvlášť na každou složku výsledné inverzní matice (za pomoci rozkladu na parciální zlomky) dopočítáte, že exponenciála od první resp. druhé matice je:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e+e^{-1}) & \frac{1}{2}(e-e^{-1}) \\ \frac{1}{2}(e-e^{-1}) & \frac{1}{2}(e+e^{-1}) \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} e & \frac{1}{2}(e-e^{-1}) \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Maticová exponenciála a řešení soustav lineárních rovnic

V této podkapitole se budeme zabývat vlastnostmi funkce

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \Phi : t \mapsto e^{tA}.$$

Mimo jiné ukážeme, že ΦC je řešením soustavy $Y' = AY$ pro každý vektor $C \in \mathbb{R}^n$.

Nejprve si uvědomme, že z odhadu (3) (v minulé podkapitole) plyne pro $t \in [-K, K]$

$$\left\| \sum_{m=k}^{l} \frac{A^m t^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(K\|A\|)^m}{m!}. \tag{4}$$

Tedy řada konverguje lokálně stejnoměrně a funkce Y je tedy spojitá. Zderivujeme-li m-tý člen řady, získáme

$$f_n'(t) = \frac{1}{m!} A^m m t^{m-1} = A\frac{A^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Odhad (4) nám tedy dává také stejnoměrnou konvergenci derivací. Odtud plyne, že limitní funkce je diferencovatelná a lze ji derivovat člen po členu. Odtud ihned dostáváme

$$\Phi'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} A\frac{A^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!} = A\Phi(t),$$

tedy funkce Φ splňuje rovnici (1) a $Y(t) = \Phi(t)C$ je řešení soustavy rovnic (1).

Příklad 2. Najděte fundamentální matici následující soustavy pomocí maticové exponenciály

$$\begin{aligned} x' &= 10x - 6y \\ y' &= 18x - 11y. \end{aligned}$$

Řešení. Vypočítáme vlastní čísla matice soustavy

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 10)(\lambda + 11) + 6 \cdot 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

Vlastní vektor příslušný $\lambda_1 = 1$ je v_1 splňující $(I - A)v_1 = 0$, tj. $v_1 = (2, 3)$. Vlastní vektor příslušný $\lambda_2 = 2$ splňuje $(-2I - A)v_2 = 0$, tj. $v_2 = (1, 2)$. Tedy

$$A = VJV^{-1} = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} V^{-1},$$

kde

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$\Phi(t) = e^{tA} = Ve^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} V^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ 6e^t - 6e^{-2t} & -3e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix},$$

což je fundamentální matice soustavy.

Poznámka. Uvědomte si, že pro každou regulární matici M je maticová funkce $\Phi(t)M$ také fundamentální maticí soustavy (vynásobením zprava nahradíme sloupce lineárními kombinacemi sloupců původní matice). Tedy i $V^{-1}e^{tJ}$ je fundamentální matice soustavy. Ale $\Phi(t) = Ve^{tJ}V^{-1}$ je jediná fundamentální matice, pro kterou platí $\Phi(0) = I$. Proto $\Phi(t)C$ je řešení soustavy splňující počáteční podmínku $Y(0) = C$.

Pro chování řešení soustavy pro $t \to +\infty$ je klíčový následující odhad, který hojně využijete v kapitole o stabilitě. Jeho důkaz je ponechán jako cvičení.

Tvrzení 1. *Pro každé $\epsilon > 0$ existuje $M \geq 1$ takové, že platí*

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{t(\alpha+\epsilon)} \quad \textit{pro všechna } t \geq 0,$$

kde $\alpha := \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Úlohy na řešení soustav lineárních rovnic

Najděte obecné řešení následujících soustav pomocí maticové exponenciály.

11.

$$\begin{aligned} x' &= -6x + 8y \\ y' &= -4x + 6y \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 3y \\ y' &= 6x + 7y \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} x' &= -12x - 8y \\ y' &= 20x + 12y \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} x' &= -5x - 10y \\ y' &= 5x + 5y \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} x' &= 5x - 6y \\ y' &= 3x - y \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} x' &= -5x + 4y \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 8y + 6z \\ y' &= -4x + 10y + 6z \\ z' &= 4x - 8y - 4z \end{aligned}$$

18. Najděte fundamentální matici soustavy $Y' = AY$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že $A^3 = 0$ a při výpočtu fundamentální matice využijte tohoto faktu.

Řešení

11) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2\,e^{-2\,t}-e^{2\,t} & 2\,e^{2\,t}-2\,e^{-2\,t} \\ -e^{2\,t}+e^{-2\,t} & -e^{-2\,t}+2\,e^{2\,t} \end{pmatrix}$$

12) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2\,e^{t}-e^{4\,t} & -e^{4\,t}+e^{t} \\ 2\,e^{4\,t}-2\,e^{t} & -e^{t}+2\,e^{4\,t} \end{pmatrix}$$

13) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} \cos(4\,t)-3\,\sin(4\,t) & -2\,\sin(4\,t) \\ 5\,\sin(4\,t) & \cos(4\,t)+3\,\sin(4\,t) \end{pmatrix}$$

14) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} \cos(5\,t)-\sin(5\,t) & -2\,\sin(5\,t) \\ \sin(5\,t) & \cos(5\,t)+\sin(5\,t) \end{pmatrix}$$

15) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} e^{2\,t}\cos(3\,t)+e^{2\,t}\sin(3\,t) & -2\,e^{2\,t}\sin(3\,t) \\ e^{2\,t}\sin(3\,t) & e^{2\,t}\cos(3\,t)-e^{2\,t}\sin(3\,t) \end{pmatrix}$$

16) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} e^{-3\,t}-2\,te^{-3\,t} & 4\,te^{-3\,t} \\ -te^{-3\,t} & e^{-3\,t}+2\,te^{-3\,t} \end{pmatrix}$$

17) Fundamentální matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2-e^{2\,t} & 4\,e^{2\,t}-4 & 3\,e^{2\,t}-3 \\ -2\,e^{2\,t}+2 & -4+5\,e^{2\,t} & 3\,e^{2\,t}-3 \\ 2\,e^{2\,t}-2 & -4\,e^{2\,t}+4 & 3-2\,e^{2\,t} \end{pmatrix}$$

18) Jelikož $A^3 = 0$ (snadno se ověří výpočtem) je fundamentální matice soustavy $\phi(t) = e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$, tedy:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t+2t^2 & -2t-4t^2 & -t+6t^2 \\ -t+t^2 & 1+2t-2t^2 & -5t+3t^2 \\ -t & 2t & 1-3t \end{pmatrix}.$$

Teoretičtější úlohy

19. Dokažte Tvrzení 1.

20. Načrtněte chování soustavy $x' = Ax$ s konstantní maticí A, pokud A je podobná matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Rozlište případy: (a) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, (b) $0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

21. Vypočtěte exponenciálu matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(pokud možno bez rutinního přechodu na Jordanův tvar). Načrtněte chování řešení soustavy s výše uvedenou maticí; jak se liší případy $a > 0$, $a < 0$ a $a = 0$?

22. (a) Spočítejte přímo z definice e^{tA}, víte-li, že $A^2 = -I$.
(b) Ukažte, že $A^2 = -I$ implikuje $\sigma(A) \subset \{i, -i\}$.
(c) Pomocí (a) určete fundamentální matici soustavy $u' = Au$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

23. (a) Spočítejte přímo z definice e^{tA}, víte-li, že $A^2 = c^2 I$, $c > 0$.
(b) Ukažte, že $A^2 = c^2 I$ implikuje $\sigma(A) \subset \{c, -c\}$.
(c) Pomocí bodu (a) najděte fundamentální matici pro systém $u' = Au$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Vypočítejte

$$\int_0^\infty e^{tA}\,dt\,,$$

víte-li, že matice A má pouze záporná vlastní čísla. (Proč konverguje tento integrál?)

25. Ukažte, že $[\sin(tA)]' = A\cos(tA)$ a $[\cos(tA)]' = -A\sin(tA)$.

26. Najděte všechna řešení soustavy $Y'' = AY$ pro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pomocí maticového sinu a cosinu.

Řešení

19) Plyne snadno z tvaru e^J pro Jordanovu buňku J.

20) Řešení je lineární kombinací $e^{\lambda_i t}v$, kde v je odpovídající vlastní vektor.

21) $e^{a+ib} = e^a[\cos b + i\sin b]$; matice „reprezentuje" číslo $a+ib$. Výsledek tedy bude

$$\begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}$$

Pro $a < 0$ bude maticová exponenciála konvergovat k 0, pro $a = 0$ bude omezená a pro $a > 0$ neomezená.

22) (a) $e^{tA} = (\cos t)I + (\sin t)A$. (b) uvažte, že $\lambda \in \sigma(M)$ právě když existuje nenulový vektor v tak, že $Av = \lambda v$. (c) Výpočtem ověřte, že $A^2 = -I$. Poté z bodu (a) plyne, že fundamentální matice $\phi(t)$ je $e^{tA} = I\cos t + A\sin t$, tedy:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t & 8\sin t & -12\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t & 4\sin t & -8\sin t \\ 0 & 0 & \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

23) (a) $e^{tA} = \cosh(tc)I + c^{-1}\sinh(tc)A$

(b) $\sigma(c^2 I) = \{c^2\}$. Využijte větu o obrazu spektra s funkcí $f(x) = x^2$. Pak $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)) = \sigma(c^2 I) = \{c^2\}$, což implikuje, že $\sigma(A) \subset \{-c, c\}$.

(c) Výpočtem ověřte, že $A^2 = 36I$. Fundamentální matice je pak dle bodu (a) rovna matici $e^{tA} = I\cosh(6t) + \frac{1}{6}A\sinh(6t)$, tedy:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cosh 6t + \frac{1}{2}\sinh 6t & \frac{1}{2}\sinh 6t & -\frac{1}{2}\sinh 6t \\ \sinh 6t & \cosh 6t & \sinh 6t \\ -\frac{1}{2}\sinh 6t & \frac{1}{2}\sinh 6t & \cosh 6t + \frac{1}{2}\sinh 6t \end{pmatrix}.$$

24) Vypočtěte nejprve pro matici 1×1, tj. záporné reálné číslo. To vám napoví výsledek. Definice: $B = A^{-1}$, právě když $BA = I$.

25) Stejně jako v úvodu kapitoly 1.2 ukažte, že lze derivovat řadu vyjadřující sinus resp. cosinus člen po členu. Po zderivování stačí vhodně vytknout a upravit.

26) Na základě cvičení 25 ukažte, že $(\sin tB)'' = -B^2 \sin tB$ a $(\cos tB)'' = -B^2 \cos tB$ pro libovolnou matici B. Nalezne-li se matice B taková, že $-B^2 = A$, bude $\{\sin Bt, \cos Bt\}$ tvořit fundamentální systém řešení zadané soustavy. Zmíněnou matici B lze nalézt např. pomocí Cauchyho vzorce (zmíněného ve cvičení 10), stačí volit $f(z) = \sqrt{-z}$ a spočítat $f(A)$. Pak $B = f(A) = \sqrt{-A}$ a vyjde tedy

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A pak fundamentální systém tvoří matice:

$$\sin Bt = \begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}t & -\frac{t}{2\sqrt{2}}\cos\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sin\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{a } \cos Bt = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t & \frac{t}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

které lze vypočítat například pomocí Cauchyho vzorců:
$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-1}dz,$
$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-2}dz,$
stejným postupem jako ve cvičení 10, jenom místo funkce *exp* uvažujte funkce sin resp. cos.