Dynamické systémy

Definice 1. Dynamickým systémem rozumíme dvojici (φ, Ω), kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ je spojité zobrazení, splňující ,,semigrupovou vlastnost“

(i) $\varphi(0, x) = x$ pro $\forall x \in \Omega$

(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ pro $\forall x \in \Omega$, t, $s \in \mathbb{R}$

Kanonický příklad. Diferenciální rovnice

$$x' = f(x)\,, \tag{1}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je daná funkce, určuje dynamický systém (φ, Ω) pomocí řešicí funkce

$$\varphi : (t, x_0) \mapsto x(t)\,, \tag{2}$$

kde $x(t)$ je řešení (1) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Z obecných vět o existenci a jednoznačnosti plyne, že pokud je $f \in C^k$, $k \geq 1$, je φ korektně definováno (minimálně pro t blízká 0) a φ je také třídy C^k.

Poznámka. Naopak, lze ukázat, že každý dynamický systém (za předpokladu $\varphi \in C^1$) vzniká jako řešicí funkce určité diferenciální rovnice tvaru (1). Viz úloha 4 níže. Při studiu této teorie je tedy dobré mít na mysli vzájemně jednoznačnou korespondenci: rovnice $\iff$ dynamický systém.

Poznamenejme ještě, že speciálně pro lineární rovnici

$$x' = Ax$$

kde A je konstantní matice, lze odpovídající dynamický systém napsat explicitně pomocí exponenciály matice:

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}\,.$$

Poznámka. Otázka, zda pro danou rovnici je odpovídající dynamický systém definován pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (tj. otázka globální existence řešení) je obecně, tedy pro nelineární f, značně netriviální problém. Jednoduché příklady ukazují, že řešení může utéci do nekonečna (tzv. ,,blow-up“) v konečném čase. Následující kritérium však poslouží ve většině rozumných aplikací.

Tvrzení 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina, nechť řešení rovnice* (1) *s počáteční podmínkou v Ω nemohou opustit Ω. Potom tato řešení jsou definována pro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Jak v praxi zajistit, aby řešení nemohla opustit Ω ?

1. vektor $f(x)$ na hranici směřuje striktně dovnitř Ω – protože řešení jsou křivky $x = x(t)$, jejichž tečnou je $f(x(t))$, nelze v takovém bodě dosáhnout hranice „zevnitř“.

2. hranice $\partial\Omega$ sama je tvořena křivkami řešení a stacionárními body – také zde nelze hranici překročit (byl by to spor s jednoznačností řešení).

Definice 2. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Množina M se nazve *invariantní*, jestliže $x \in M$ implikuje $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$.

Klíčový objekt pro studium chování dynamických systémů pro velké časy je obsahem následující definice.

Definice 3. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, nechť $x_0 \in \Omega$. Omega-limitní množinou bodu x_0 rozumíme

$$\omega(x_0) = \big\{ y \in \Omega;\ \ \text{existují } t_k \to \infty \text{ tak, že } \varphi(t_k, x_0) \to y \ \big\} .$$

Analogicky definujeme alfa-limitní množinu

$$\alpha(x_0) = \big\{ y \in \Omega;\ \ \text{existují } t_k \to -\infty \text{ tak, že } \varphi(t_k, x_0) \to y \ \big\} .$$

Věta 2. $\omega(x_0)$ *je uzavřená a invariantní. Je-li navíc pozitivní trajektorie*

$$\gamma^+(x_0) = \big\{ \varphi(t, x_0);\ t \geq 0 \big\}$$

relativně kompaktní, je $\omega(x_0)$ *neprázdná, kompaktní a souvislá.*

Poznámka. Omega-limitní množina sestává ze všech hromadných bodů dopředné trajektorie; přesněji vzato jsou to právě ty body, v jejichž libovolně malém okolí se řešení ocitne pro libovolně velké časy.
Podmínka relativní kompaktnosti (v případě $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní omezenosti příslušného orbitu) v druhé části věty je podstatná: viz úloha 2, 3 dále.

Úlohy na dynamické systémy

1. Najděte explicitně řešicí funkci $\varphi(t, x)$ pro rovnice/systémy

(i) $x' = x^p$, $p \in \mathbb{R}$ (pro $x > 0$)

(ii) $x'' + x = 0$ (přepište jako systém 2. rovnic)

(iii) $x' = x + \ln y$, $y' = -y$ (pro $y > 0$)

(iv) $x' = y^2 - x^2$, $y' = -2xy$ (užijte komplexní tvar $z = x + iy$)

Ověřte, že (alespoň lokálně) je splněna vlastnost dynamického systému: $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$.

2. Najděte dynamický systém v $\mathbb{R}^2$ tak, že pro vhodný počáteční bod x_0:

(i) $\omega(x_0) = \emptyset$

(ii) $\omega(x_0)$ je jednotková kružnice

(iii) $\omega(x_0)$ je dvoubodová

(iv) $\omega(x_0)$ je přímka

(v) $\omega(x_0)$ je jednotkový kruh

3. (Nesouvislá ω-limitní množina) Uvažujte systém rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -y(1-x^2), \\ y' &= x + y(1-x^2). \end{aligned}$$

Omezte se na svislý pás $|x| < 1$, přičemž:
(i) najděte a analyzujte stacionární body
(ii) identifikujte křivky, kde x' resp. y' mění znamení a načrtněte průběhy řešení
(iii) ukažte, že pro každý bod $x_0 \neq 0$ je $\omega(x_0)$ rovna sjednocení přímek $x = \pm 1$

4. Nechť $\varphi(t,x)$ je hladký dynamický systém v R^n. Ukažte, že pro každé pevné x_0 je funkce $x(t) := \varphi(t,x_0)$ řešením rovnice $x' = f(x)$, kde $f(\xi) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,\xi)$.

5. Dokažte tvrzení: máme dynamický systém v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\omega(x_0) = \{z\}$. Potom $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x_0) = z$. (V řeči diferenciálních rovnic: řešení vycházející z bodu x_0 konvergují k z pro $t \to \infty$.)

6. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém; nechť $\gamma^+(x_0)$ je relativně kompaktní. Potom $\varphi(t,x_0) \to \omega(x_0)$ pro $t \to \infty$ ve smyslu distance[1] množin, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,x_0), \omega(x_0)) = 0.$$

7. Najděte takový dynamický systém v $\mathbb{R}^2$ (nebo ukažte, že neexistuje), že $\omega(x_0)$ je jednotková kružnice

(i) pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(ii) pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$

[1] Značíme $\operatorname{dist}(a, M) = \inf_{x\in M} |a - x|$.

8. Nechť $\omega(x_0)$ není souvislá. Pak omezené komponenty $\omega(x_0)$ nejsou izolované (každá omezená komponenta má nulovou vzdálenost od jiné komponenty).

Řešení

1) (i) je-li $p = 1$, pak $x_0 \mapsto x_0 e^t$, $t \in \mathbb{R}$; pro $p \neq 1$ máme $x_0 \mapsto [t(1-p) + x_0^{1-p}]^{\frac{1}{1-p}}$, s omezením $t > -\frac{x_0^{1-p}}{1-p}$, je-li $p < 1$, a s omezením $t > -\frac{x_0^{1-p}}{1-p}$, je-li $p > 1$.
(ii) $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t)$; uvažte, že $\varphi(t, \cdot)$ je lineární
(iii) $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 e^t + (\ln y_0 - t)(e^t - 1), y_0 e^{-t})$
(iv) rovnice má obecné řešení $z(t) = z_0/(1 + tz_0)$, orbity jsou kružnice se středy na imaginární ose

2) (i) $\varphi(t, x) = t + x$, $t \in \mathbb{R}$; (ii) systém generovaný rovnicemi (v polárních souřadnicích) $r' = r - r^2$, $\phi' = -1$; řešením je kružnice $r = 1$ a počátek (stacionární bod). Všechna ostatní řešení jsou spirály, navíjející se k jednotkové kružnici coby ω-limitní množině. V kartézských souřadnicích jde o soustavu

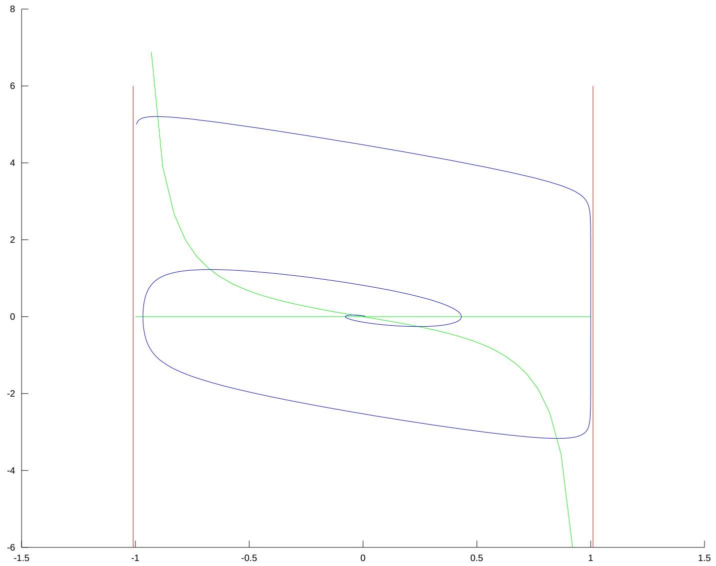
$$
\begin{aligned}
x' &= x + y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\
y' &= -x + y - y\sqrt{x^2 + y^2}.
\end{aligned}
$$

(iii) nemá řešení – je-li $\omega(x_0) = \{a, b\}$, volme $\delta > 0$ takové, že $U(a, 2\delta) \cap U(b, 2\delta) = \emptyset$. Ovšem orbit bodu x_0 protíná kružnici $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| = \delta\}$ pro libovolně velké časy; z kompaktnosti zde leží další prvek $\omega(x_0)$, což je spor. (iv) užijte případ (ii) a konformní zobrazení roviny, které převádí kružnici na přímku. (v) nemá řešení, $\omega(x_0)$ musí mít prázdný vnitřek.

3) (i) $(0, 0)$ – nestabilní vír, z nějž vybíhají spirály proti směru hodinových ručiček; (ii) $x' = 0$ pro $y = 0$, $y' = 0$ pro $y = x/(x^2 - 1)$, což naznačuje týž spirálovitý průběh; (iii) z Bendixson-Dulacova kritéria (volme $B = 1/(x^2 - 1)$) plyne neexistence periodických řešení uvnitř pásu. Tedy posloupnost ξ_k průsečíků (netriviálního) řešení s úsečkou $\{(x, 1);\ 0 < x < 1\}$ je prostá (rostoucí) a nemůže mít hromadný bod *uvnitř* pásu (neboť ten by musel ležet na periodickém orbitu, jak plyne z důkazu Poincaré-Bendixsonovy věty). Nutně $\xi_k \to 1-$ a spirála se tedy „lokálně stejnoměrně" blíží k přímce $x = 1$. Symetrický argument na druhé straně. — Viz obrázek (řešení modré, izočáry zelené, omega-limitní množina červená).

4) Uvažte, že pro t_0 pevné je

$$x(t_0 + t) = \varphi(t_0 + t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_0, x_0)).$$



Obrázek 1: Úloha 3

Odsud (derivováním v $t = 0$) plyne

$$x'(t_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \varphi(t_0, x_0)) = f(\varphi(t_0, x_0)) = f(x(t_0)).$$

5) Pokud z není limitou, pak orbit $\varphi(t, x_0)$ se nachází mimo nějaké ε-okolí pro libovolně velké časy. Zároveň se (neboť $z \in \omega(x_0)$) nachází v tomto okolí pro libovolně velké časy. Tedy existuje posloupnost $t_k \to +\infty$, že $|\varphi(t_k, x_0) - z| = \varepsilon$. Pak by ovšem na (kompaktní) sféře $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - z| = \varepsilon\}$ existoval další prvek $\omega(x_0)$ – spor.

6) Pokud závěr neplatí, existuje $\delta > 0$ a posloupnost $t_k \to \infty$ tak, že $\operatorname{dist}(\varphi(t_k, x_0), \omega(x_0)) \geq \delta$. Díky předpokladu kompaktnosti má $\varphi(t_k, x_0)$ hromadný bod, který však je prvkem $\omega(x_0)$ – spor.

7) (i) Orbity bude tvořit systém spirál začínajících v počátku nebo v nekonečnu a přimykajících se k jednotkové kružnici. (ii) Nelze, $\alpha(x_0)$ by pro $|x_0| < 1$ musela být také částí jednotkové kružnice, tedy celá kružnice podle Poincaré-Bendixsonovy věty. Malá úsečka protínající kolmo kružnici je transverzálou, průsečíky s orbitou na ní musí tvořit monotónní posloupnost, což je spor s tím, že kružnice je α i ω limitní množina.

8) Uvažujme omezenou izolovanou komponentu K a $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < \varepsilon\}$. Pokud $\gamma_+(x_0)$ zůstane pro $t \geq t_0$ v U_ε, máme spor s nesouvislostí $\omega(x_0)$. Pokud orbita množinu U_ε bude stále opouštět, bude mít hromadný bod v $\overline{U_\delta}\setminus U_{\delta/2}$, a to pro každé $\varepsilon > \delta > 0$. Což je spor s izolovaností K.

La Salleho princip invariance

První aplikací teorie dynamických systémů, která využívá pojmu ω-limitní množiny, je tzv. La Salleho princip invariance.

Motivační příklad. Máme rovnici

$$x'' = -x - q(x'),$$

popisující kyvadlo se třením, neboli zrychlení rovná se mínus vychýlení mínus třecí síla. Rozumný předpoklad na třecí sílu je

$$q(0) = 0, \qquad q(y)y > 0 \quad \text{pro } y \neq 0, \tag{3}$$

neboť tření působí striktně proti směru pohybu. Na základě fyzikální intuice očekáváme, že klidový stav $x(0) = x'(0) = 0$ bude asymptoticky stabilní.

Rovnici přepíšeme jako systém v $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - q(y). \end{aligned}$$

Linearizace v počátku vede k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

kde $a = -q'(0)$. Z předpokladu (3) je $q'(0) \geq 0$, což obecně nedává nic (pro $a = 0$ je spektrum A rovno $\{i, -i\}$.) Silnější požadavek $q'(0) > 0$ už zaručuje, že počátek je asymptoticky stabilní.

Nabízí se použití Ljapunovské funkce $V = x^2 + y^2$. Orbitální derivace je

$$\dot{V} = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2xy - 2yq(y) = -2yq(y) \leq 0.$$

Tedy za předpokladu (3) je počátek stabilní; Ljapunovova věta však nestačí na asymptotickou stabilitu, neboť $\dot{V} < 0$ pouze pro $y \neq 0$, nikoliv – jak bychom potřebovali – pro všechna $(x, y) \neq (0, 0)$.

Nelze však tuto větu zpřesnit? Ve skutečnosti $\dot{V} < 0$ „téměř pořád“, řešení totiž obíhají kolem počátku po spirále a nepříjemnou množinu $y = 0$ protínají

jenom občas. Je tedy přirozené předpokládat, že $V \to 0$, tj. systém směřuje do počátku, pro $t \to \infty$.
Přesně to je obsahem následující věty. Připomeňme, že $\omega(x_0)$ značí omega-limitní množinu daného bodu, a $\gamma(x_0)$ je (úplný) orbit, který z bodu vychází, tj.

$$\gamma(x_0) = \big\{ x(t),\ t \in \mathbb{R};\ x(t) \text{ je řešení s poč. podm. } x(0) = x_0 \ \big\}$$

Věta 3. *[La Salleho princip invariance.] Je dána rovnice $x' = f(x)$, kde $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*
Nechť existuje funkce $V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, která je C^1, zdola omezená, a nechť existuje $\ell \in \mathbb{R}$ takové, že množina

$$\Omega_\ell := \big\{ x \in \Omega;\ V(x) < \ell \big\}$$

je omezená a platí

$$\dot{V}(x) \le 0 \quad \forall x \in \Omega_\ell$$

Označme dále

$$\begin{aligned} R :=& \big\{ x \in \Omega_\ell;\ \dot{V}(x) = 0 \big\} \\ M :=& \big\{ x_0 \in R;\ \gamma(x_0) \subset R \big\} \end{aligned}$$

Potom pro každé $x_0 \in \Omega_\ell$ je $\omega(x_0) \subset M$.

Poznámka. Předpoklady věty zaručují, že množina Ω_ℓ je pozitivně invariantní, tj. řešení ji nemohou opustit s rostoucím časem. Množina M je, ekvivalentně vyjádřeno, největší invariantní podmnožina R. Závěr věty – $\omega(x_0) \subset M$ – říká, že orbity startující z $x_0 \in \Omega_\ell$ mají hromadné body pouze v M; vzhledem ke kompaktnosti (omezenost Ω_ℓ) to už nutně znamená, že orbity se blíží k M ve smyslu distance množin. Speciálně, pokud M obsahuje jediný bod, řešení konvergují k tomuto bodu. (Srovnej úlohy 5, 6).

Příklad – dokončení. Volíme $V = x^2 + y^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\ell > 0$ libovolné. Tedy

$$R = \big\{ (x, y) \in \Omega_\ell;\ \dot{V} = 0 \big\} = \big\{ (x, 0);\ -\ell < x < \ell \big\}$$

Ovšem pokud $(x, 0) \in R$, $x \neq 0$, z rovnice je $y' = -x \neq 0$, tj. řešení ihned opustí množinu R. Jedinou invariantní podmnožinou R je tedy $M = \{(0, 0)\}$. Z výše uvedené věty plyne, že ω-limitní množina každého bodu z $\Omega_\ell = \big\{ (x, y);\ x^2 + y^2 \le \ell^2 \big\}$ je počátek $(0, 0)$, tj. počátek je asymptoticky stabilní.

Úlohy na La Salleho větu

9. Nechť f, $g \in C^1(\mathbb{R})$ jsou rostoucí, $f(0) = g(0) = 0$. Vyšetřete stabilitu stacionárních bodů systému

$$\begin{aligned} x' &= -y - f(x), \\ y' &= g(x). \end{aligned}$$

Návod: $V = \int g(x)dx + y^2/2$.

10. Nalezněte ω-limitní množiny pro systém

$$\begin{aligned} x' &= y - x^7(x^4 + 2y^2 - 10), \\ y' &= -x^3 - 3y^5(x^4 + 2y^2 - 10). \end{aligned}$$

Návod: $V = (x^4 + 2y^2 - 10)^2$.

11. Ukažte, že počátek je globálně asymptoticky stabilní pro systém

$$x' = -y - x^3, \qquad y' = x^5.$$

Návod: $V = x^n + y^m$ *pro vhodná sudá* m, n.

12. Ukažte, že počátek je globálně asymptoticky stabilní pro systém

$$x' = -x^3 + 2y^3, \qquad y' = -2xy^2.$$

Řešení

9) Počátek je jediný stacionární bod. (Linearizace dává asymptotickou stabilitu, pokud navíc $f'(0) > 0$ a $g'(0) > 0$.) Označíme $G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$ a definujeme $V = G(x) + y^2/2$. Potom (při značení Věty 3) je Ω_ℓ vždy omezená; $\dot{V} = -f(x)g(x)$, tedy $R = \Omega_\ell \cap \{x = 0\}$ a protože $x' \neq 0$ pro $x = 0$, $y \neq 0$, je M rovno počátku, který je tak globálně asymptoticky stabilní.

10) Protože $\dot{V} = -8V(x^2 + 2y^6) \leq 0$, je $M = R = \{0\} \cup E$, kde E je „elipsa" $\{x^4 + 2y^2 = 10\}$. Je-li x_0 různý od počátku, pak $0 \notin \omega(x_0)$, (neboť V má v 0 lokální maximum); tedy $\omega(x_0) \subset E$. Dokonce nutně $\omega(x_0) = E$ a E je periodický orbit (elementární úvahy nebo užitím Poincaré-Bendixsonovy věty).

11) Volíme $V = x^6/3 + y^2$, tedy $\dot{V} = -2x^8$. Dále $R = \Omega_\ell \cap \{x = 0\}$, ovšem M je pouze počátek, který je tak (globálně) asymptoticky stabilní díky úloze 5.

12) $V = x^2 + y^2$, $\dot{V} = -4x^4$; dále analogicky jako v úloze 11.

Poincaré-Bendixsonova teorie

Během této kapitoly budeme uvažovat dynamický systém (φ, Ω), kde Ω je oblast (tj. otevřená, souvislá množina) v $\mathbb{R}^2$. Funkce $\varphi = \varphi(t, x)$ je definována alespoň pro všechna $t \geq 0$, $x \in \Omega$ a je spojitě diferencovatelná. Poznamenejme, že omezení na dvoudimenzionální dynamiku je v celé teorii *podstatné*, neboť souvisí s topologií roviny.
Připomeňme si některé pojmy: *jednoduchou uzavřenou křivkou* rozumíme množinu $\gamma \subset \Omega$ takovou, že $\gamma = \phi([0,1])$, kde $\phi : [0,1] \to \Omega$ je spojité zobrazení, které je prosté na $[0,1)$ a platí $\phi(0) = \phi(1)$. Zřejmě orbit (netriviálního) periodického řešení je jednoduchá, uzavřená křivka. V rovině platí Jordanova věta: je-li γ jednoduchá uzavřená křivka, pak lze (disjunktně) psát

$$\mathbb{R}^2 = M_1 \cup \gamma \cup M_2,$$

kde M_i jsou otevřené, souvislé množiny; navíc M_1 je omezená a M_2 je neomezená. Je užitečné značit $M_1 = \operatorname{int} \gamma$.
Hlavním výsledkem je následující věta.

Věta 4 (Poincaré-Bendixson)**.** *Nechť $p \in \Omega$ je takové, že $\overline{\gamma^+(p)}$ je kompaktní, a nechť $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit netriviálního periodického řešení.*

Poznámka. Kompaktnost dopředného orbitu plyne z (fakticky je ekvivalentní) jeho omezenosti; speciálně stačí předpokládat, že Ω je omezená.
Vyloučit existenci stacionárních bodů v $\omega(p)$ můžeme obvykle úvahou jako v úloze 15 níže; všimněme si ovšem, že Ω za předpokladu věty vždy obsahuje stacionární body – viz úloha 14.

Příklad 1. Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x^3 \\ y' &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

má netriviální periodické řešení.

Řešení. Kvalitativní analýza odhaluje jediný stacionární bod $(0,0)$. Znaménka derivací mimo „izočar“ (=překlad výrazu "isoclines") $x' = 0$ resp. $y' = 0$ nutí řešení ke spirálovitému pohybu (pravotočivě) kolem počátku.
Linearizace v bodě $(0,0)$ je určena maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s vlastními čísly $1 \pm i$. Odsud plyne (viz úloha 15) dále, že $(0,0)$ neleží v ω-limitní množině žádného orbitu.

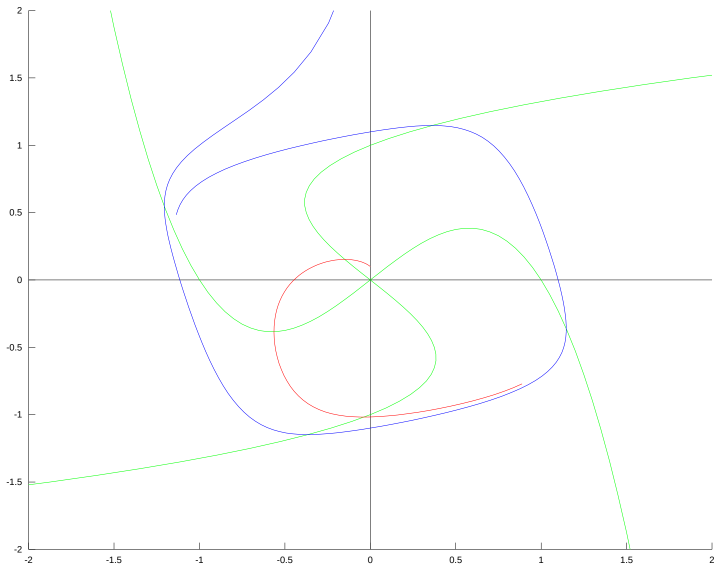
Konstrukci dopředně-invariantní množiny Ω provedeme pomocí Ljapunovské funkce $V = x^2 + y^2$. Orbitální derivace je

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2xx' + 2yy' \\ &= 2x(x - y - x^3) + 2y(x + y - y^3) \\ &= 2(x^2 + y^2 - (x^4 + y^4)).\end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že $\dot{V} < 0$ pokud $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je dosti velké číslo. Tedy množina

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

je pozitivně invariantní; dynamický systém (φ, Ω) je definován pro všechna $t \geq 0$ a jeho orbity jsou kompaktní. Z Věty 4 nyní plyne, že každé řešení v Ω se pro $t \to \infty$ blíží k periodickému orbitu Γ.



Obrázek 2: Příklad 1

Poincaré-Bendixsonova věta speciálně zaručuje *existenci* netriviálního periodického řešení. Následující výsledek naproti tomu obsahuje užitečné negativní kritérium.

Připomeňme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$ platí, že $\operatorname{int}\gamma \subset \Omega$. Ekvivalentně řečeno: každou jednoduchou uzavřenou křivku lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

Věta 5 (Bendixson-Dulac)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast; nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1 funkce a nechť existuje C^1 funkce $B : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že* $\operatorname{div}(Bf) > 0$ *skoro všude v Ω. Potom rovnice $x' = f(x)$ nemá v Ω (netriviální) periodické řešení.*

Úlohy na Poincaré-Bendixsonovu teorii

13. Přechodem k polárním souřadnicím vyšetřete existenci periodických řešení pro systém

$$\begin{aligned} x' &= ax - y + xy^2, \\ y' &= x + ay + y^3 \end{aligned}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast; nechť $\Gamma \subset \Omega$ je periodický orbit. Potom $\operatorname{int}\Gamma$ obsahuje alespoň jeden stacionární bod. *Návod: dle Zornova lemmatu existuje nejmenší kompaktní invariantní podmnožina vnitřku Γ. Ukažte, že je nutně jednobodová.*

15. Nechť x_0 je stacionární bod rovnice $x' = f(x)$, nechť $A = \nabla f(x_0)$ má všechna vlastní čísla s kladnou reálnou částí. Potom x_0 není v ω-limitní množině žádného bodu (vyjma x_0).

16. Ukažte, že van der Polova rovnice

$$x'' + x'(x^2 - 1) + x = 0$$

má periodické řešení.

17. Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - 2y^2), \\ y' &= x + y(1 - 2x^2 - y^2) \end{aligned}$$

má periodické řešení.

18. Ukažte, že systém

$$x' = 1 - xy, \qquad y' = x$$

nemá periodická řešení.

19. Ukažte, že systém

$$x' = x + xy^2, \qquad y' = (1 - y^2)/2$$

nemá periodická řešení.

20. Ukažte, že systém

$$x' = \frac{x - 2y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{2x - y/2}{1 + x^2 + y^2}$$

nemá periodická řešení.

Řešení

13) $r' = r(a + r^2 \sin^2 \phi)$, $\phi' = 1$. Odsud $\phi = t + c$ a hledáme tedy 2π-periodická řešení rovnice pro r. Pro $a \geq 0$ neexistují taková řešení (dokonce $r \to \infty$ v konečném čase); pro $a < 0$ ano (rovnice pro r je Bernoulliho a lze ukázat, že má dokonce jediné 2π periodické řešení).

14) Nechť stacionární bod neexistuje. Množina

$$\mathcal{K} = \big\{ K \subset \operatorname{int} \Gamma;\ K \text{ je kompaktní, invariantní } \big\}$$

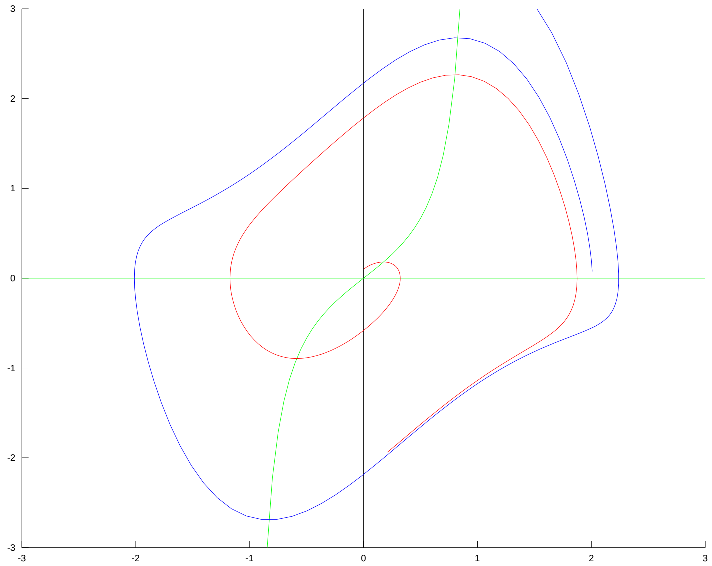
obsahuje díky Zornově lemmatu minimální (ve smyslu inkluze) prvek. Neprázdnost $\mathcal{K}$ (jakož i fakt, že minimální prvek je nutně jednobodová množina) plyne z následujícího pozorování: je-li K invariantní a $p \in \operatorname{int} K$, pak $\gamma_1 = \omega(p)$, $\gamma_2 = \alpha(p)$ jsou periodické orbity dle Věty 4; protože $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (například z lemmatu o monotónních průsečících transverzály), jeden z nich spolu se svým vnitřkem tvoří striktně menší invariantní množinu.

15) BÚNO $x_0 = 0$. Nechť $x(t)$ je netriviální orbit takový, že $x(t_k) \to 0$, kde $t_k \to \infty$. Aplikací věty o linearizované stabilitě na rovnici s obráceným časem plyne, že 0 je negativně stabilní:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \big[|x(\tau)| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \leq \tau \big].$$

Volme $0 < \varepsilon < |y(t_1)|$ a k získanému $\delta > 0$ najděme $t_k > t_1$ takové, že $|y(t_k)| < \delta$. To je spor.

16) Přepište jako systém pro $(x, y) = (x, x')$. Počátek je jediný stacionární bod a je negativně stabilní (viz úloha 15). Kvalitativní analýza naznačuje pohyb po pravotočivých spirálách. Pro $V = x^2 + y^2$ je $\dot{V} \leq 0$ pokud $|x| \geq 1$; omezenou pozitivně invariantní Ω tedy ohraničíme po stranách oblouky $\big\{ |x| > 1 \big\} \cap \big\{ x^2 + y^2 = R^2 \big\}$ a shora/zdola řešeními, spojujícími přímky $x = \pm 1$.



Obrázek 3: Úloha 16

17) Počátek je jediný stacionární bod, který je negativně stabilní. Pokud $V = x^2 + y^2$, je $\dot{V} < 0$ pro $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je dosti velké, z čehož dostáváme pozitivně invariantní kouli.

18) Elementární úvahy či fakt, že neexistují stacionární body a úloha 14.

19) Dulacovská funkce $B = 1/(1 + y^2)$.

20) Dulacovská funkce $B = 1 + x^2 + y^2$.