Úlohy na Poincaré-Bendixsonovu teorii

13. Přechodem k polárním souřadnicím vyšetřete existenci periodických řešení pro systém

$$\begin{aligned} x' &= ax - y + xy^2, \\ y' &= x + ay + y^3 \end{aligned}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast; nechť $\Gamma \subset \Omega$ je periodický orbit. Potom $\operatorname{int}\Gamma$ obsahuje alespoň jeden stacionární bod. *Návod: dle Zornova lemmatu existuje nejmenší kompaktní invariantní podmnožina vnitřku* Γ*. Ukažte, že je nutně jednobodová.*

15. Nechť x_0 je stacionární bod rovnice $x' = f(x)$, nechť $A = \nabla f(x_0)$ má všechna vlastní čísla s kladnou reálnou částí. Potom x_0 není v ω-limitní množině žádného bodu (vyjma x_0).

16. Ukažte, že van der Polova rovnice

$$x'' + x'(x^2 - 1) + x = 0$$

má periodické řešení.

17. Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - 2y^2), \\ y' &= x + y(1 - 2x^2 - y^2) \end{aligned}$$

má periodické řešení.

18. Ukažte, že systém

$$x' = 1 - xy, \qquad y' = x$$

nemá periodická řešení.

19. Ukažte, že systém

$$x' = x + xy^2, \qquad y' = (1 - y^2)/2$$

nemá periodická řešení.

20. Ukažte, že systém

$$x' = \frac{x - 2y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{2x - y/2}{1 + x^2 + y^2}$$

nemá periodická řešení.