Řešení

13) $r' = r(a + r^2 \sin^2 \phi)$, $\phi' = 1$. Odsud $\phi = t + c$ a hledáme tedy 2π-periodická řešení rovnice pro r. Pro $a \geq 0$ neexistují taková řešení (dokonce $r \to \infty$ v konečném čase); pro $a < 0$ ano (rovnice pro r je Bernoulliho a lze ukázat, že má dokonce jediné 2π periodické řešení).

14) Nechť stacionární bod neexistuje. Množina

$$\mathcal{K} = \big\{ K \subset \operatorname{int} \Gamma;\ K \text{ je kompaktní, invariantní } \big\}$$

obsahuje díky Zornově lemmatu minimální (ve smyslu inkluze) prvek. Neprázdnost $\mathcal{K}$ (jakož i fakt, že minimální prvek je nutně jednobodová množina) plyne z následujícího pozorování: je-li K invariantní a $p \in \operatorname{int} K$, pak $\gamma_1 = \omega(p)$, $\gamma_2 = \alpha(p)$ jsou periodické orbity dle Věty 4; protože $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (například z lemmatu o monotónních průsečících transverzály), jeden z nich spolu se svým vnitřkem tvoří striktně menší invariantní množinu.

15) BÚNO $x_0 = 0$. Nechť $x(t)$ je netriviální orbit takový, že $x(t_k) \to 0$, kde $t_k \to \infty$. Aplikací věty o linearizované stabilitě na rovnici s obráceným časem plyne, že 0 je negativně stabilní:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \big[|x(\tau)| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \leq \tau \big].$$

Volme $0 < \varepsilon < |y(t_1)|$ a k získanému $\delta > 0$ najděme $t_k > t_1$ takové, že $|y(t_k)| < \delta$. To je spor.

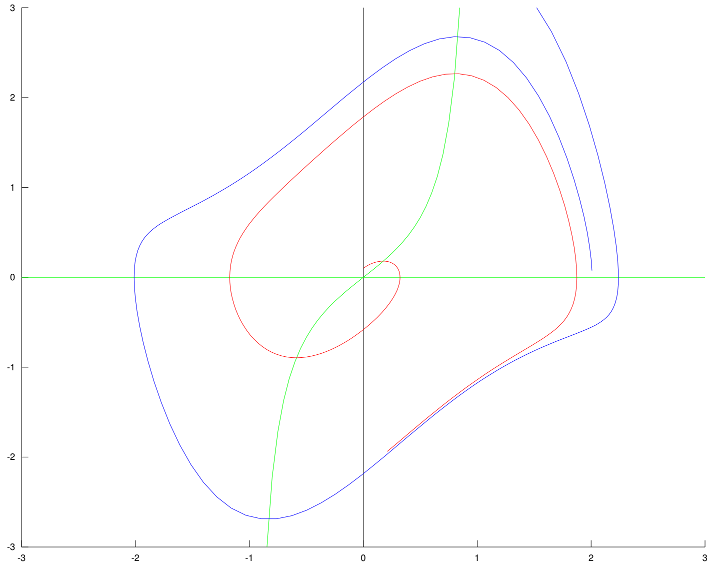
16) Přepište jako systém pro $(x, y) = (x, x')$. Počátek je jediný stacionární bod a je negativně stabilní (viz úloha 15). Kvalitativní analýza naznačuje pohyb po pravotočivých spirálách. Pro $V = x^2 + y^2$ je $\dot{V} \leq 0$ pokud $|x| \geq 1$; omezenou pozitivně invariantní Ω tedy ohraničíme po stranách oblouky $\big\{ |x| > 1 \big\} \cap \big\{ x^2 + y^2 = R^2 \big\}$ a shora/zdola řešeními, spojujícími přímky $x = \pm 1$.

17) Počátek je jediný stacionární bod, který je negativně stabilní. Pokud $V = x^2 + y^2$, je $\dot{V} < 0$ pro $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je dosti velké, z čehož dostáváme pozitivně invariantní kouli.

18) Elementární úvahy či fakt, že neexistují stacionární body a úloha 14.

19) Dulacovská funkce $B = 1/(1 + y^2)$.

20) Dulacovská funkce $B = 1 + x^2 + y^2$.



Obrázek 3: Úloha 16