Poincaré-Bendixsonova teorie

Během této kapitoly budeme uvažovat dynamický systém (φ, Ω), kde Ω je oblast (tj. otevřená, souvislá množina) v $\mathbb{R}^2$. Funkce $\varphi = \varphi(t, x)$ je definována alespoň pro všechna $t \geq 0$, $x \in \Omega$ a je spojitě diferencovatelná. Poznamenejme, že omezení na dvoudimenzionální dynamiku je v celé teorii *podstatné*, neboť souvisí s topologií roviny.

Připomeňme si některé pojmy: *jednoduchou uzavřenou křivkou* rozumíme množinu $\gamma \subset \Omega$ takovou, že $\gamma = \phi([0,1])$, kde $\phi : [0,1] \to \Omega$ je spojité zobrazení, které je prosté na $[0,1)$ a platí $\phi(0) = \phi(1)$. Zřejmě orbit (netriviálního) periodického řešení je jednoduchá, uzavřená křivka. V rovině platí Jordanova věta: je-li γ jednoduchá uzavřená křivka, pak lze (disjunktně) psát

$$\mathbb{R}^2 = M_1 \cup \gamma \cup M_2,$$

kde M_i jsou otevřené, souvislé množiny; navíc M_1 je omezená a M_2 je neomezená. Je užitečné značit $M_1 = \operatorname{int} \gamma$.

Hlavním výsledkem je následující věta.

Věta 4 (Poincaré-Bendixson)**.** *Nechť $p \in \Omega$ je takové, že $\overline{\gamma^+(p)}$ je kompaktní, a nechť $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit netriviálního periodického řešení.*

Poznámka. Kompaktnost dopředného orbitu plyne z (fakticky je ekvivalentní) jeho omezenosti; speciálně stačí předpokládat, že Ω je omezená. Vyloučit existenci stacionárních bodů v $\omega(p)$ můžeme obvykle úvahou jako v úloze 15 níže; všimněme si ovšem, že Ω za předpokladu věty vždy obsahuje stacionární body – viz úloha 14.

Příklad 1. Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x^3 \\ y' &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

má netriviální periodické řešení.

Řešení. Kvalitativní analýza odhaluje jediný stacionární bod $(0,0)$. Znaménka derivací mimo „izočar“ (=překlad výrazu "isoclines") $x' = 0$ resp. $y' = 0$ nutí řešení ke spirálovitému pohybu (pravotočivě) kolem počátku.

Linearizace v bodě $(0,0)$ je určena maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s vlastními čísly $1 \pm i$. Odsud plyne (viz úloha 15) dále, že $(0,0)$ neleží v ω-limitní množině žádného orbitu.

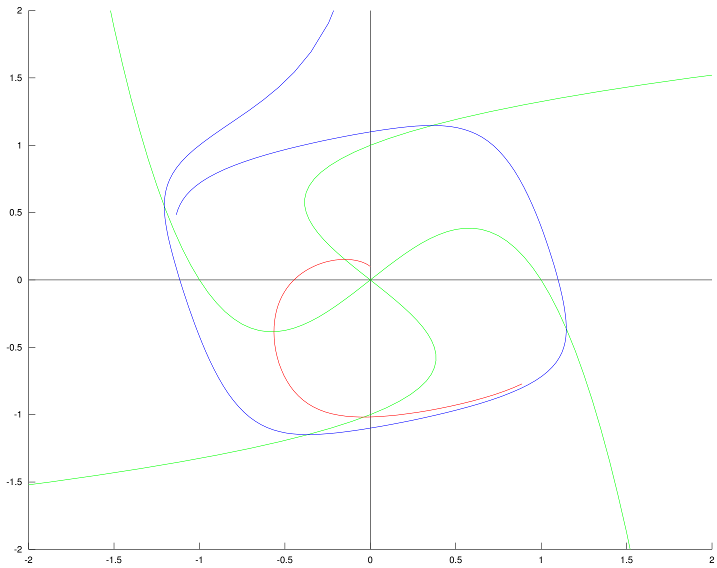
Konstrukci dopředně-invariantní množiny Ω provedeme pomocí Ljapunovské funkce $V = x^2 + y^2$. Orbitální derivace je

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2xx' + 2yy' \\ &= 2x(x - y - x^3) + 2y(x + y - y^3) \\ &= 2(x^2 + y^2 - (x^4 + y^4)).\end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že $\dot{V} < 0$ pokud $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je dosti velké číslo. Tedy množina

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

je pozitivně invariantní; dynamický systém (φ, Ω) je definován pro všechna $t \geq 0$ a jeho orbity jsou kompaktní. Z Věty 4 nyní plyne, že každé řešení v Ω se pro $t \to \infty$ blíží k periodickému orbitu Γ.



Obrázek 2: Příklad 1

Poincaré-Bendixsonova věta speciálně zaručuje *existenci* netriviálního periodického řešení. Následující výsledek naproti tomu obsahuje užitečné negativní kritérium.

Připomeňme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$ platí, že $\operatorname{int} \gamma \subset \Omega$. Ekvivalentně řečeno: každou jednoduchou uzavřenou křivku lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

Věta 5 (Bendixson-Dulac). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast; nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1 funkce a nechť existuje C^1 funkce $B : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{div}(Bf) > 0$ skoro všude v Ω. Potom rovnice $x' = f(x)$ nemá v Ω (netriviální) periodické řešení.*