La Salleho princip invariance

První aplikací teorie dynamických systémů, která využívá pojmu ω-limitní množiny, je tzv. La Salleho princip invariance.

Motivační příklad. Máme rovnici

$$x'' = -x - q(x'),$$

popisující kyvadlo se třením, neboli zrychlení rovná se mínus vychýlení mínus třecí síla. Rozumný předpoklad na třecí sílu je

$$q(0) = 0, \qquad q(y)y > 0 \quad \text{pro } y \neq 0, \tag{3}$$

neboť tření působí striktně proti směru pohybu. Na základě fyzikální intuice očekáváme, že klidový stav $x(0) = x'(0) = 0$ bude asymptoticky stabilní.

Rovnici přepíšeme jako systém v $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - q(y). \end{aligned}$$

Linearizace v počátku vede k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

kde $a = -q'(0)$. Z předpokladu (3) je $q'(0) \geq 0$, což obecně nedává nic (pro $a = 0$ je spektrum A rovno $\{i, -i\}$.) Silnější požadavek $q'(0) > 0$ už zaručuje, že počátek je asymptoticky stabilní.

Nabízí se použití Ljapunovské funkce $V = x^2 + y^2$. Orbitální derivace je

$$\dot{V} = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2xy - 2yq(y) = -2yq(y) \leq 0.$$

Tedy za předpokladu (3) je počátek stabilní; Ljapunovova věta však nestačí na asymptotickou stabilitu, neboť $\dot{V} < 0$ pouze pro $y \neq 0$, nikoliv – jak bychom potřebovali – pro všechna $(x, y) \neq (0, 0)$.

Nelze však tuto větu zpřesnit? Ve skutečnosti $\dot{V} < 0$ „téměř pořád“, řešení totiž obíhají kolem počátku po spirále a nepříjemnou množinu $y = 0$ protínají jenom občas. Je tedy přirozené předpokládat, že $V \to 0$, tj. systém směřuje do počátku, pro $t \to \infty$.

Přesně to je obsahem následující věty. Připomeňme, že $\omega(x_0)$ značí omega-limitní množinu daného bodu, a $\gamma(x_0)$ je (úplný) orbit, který z bodu vychází, tj.

$$\gamma(x_0) = \big\{ x(t),\ t \in \mathbb{R};\ x(t) \text{ je řešení s poč. podm. } x(0) = x_0 \ \big\}$$

Věta 3. *[La Salleho princip invariance.] Je dána rovnice $x' = f(x)$, kde $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*
Nechť existuje funkce $V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, která je C^1, zdola omezená, a nechť existuje $\ell \in \mathbb{R}$ takové, že množina

$$\Omega_\ell := \big\{x \in \Omega;\ V(x) < \ell\big\}$$

je omezená a platí

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_\ell$$

Označme dále

$$\begin{aligned} R :=& \big\{x \in \Omega_\ell;\ \dot{V}(x) = 0\big\} \\ M :=& \big\{x_0 \in R;\ \gamma(x_0) \subset R\big\} \end{aligned}$$

Potom pro každé $x_0 \in \Omega_\ell$ je $\omega(x_0) \subset M$.

Poznámka. Předpoklady věty zaručují, že množina Ω_ℓ je pozitivně invariantní, tj. řešení ji nemohou opustit s rostoucím časem. Množina M je, ekvivalentně vyjádřeno, největší invariantní podmnožina R. Závěr věty – $\omega(x_0) \subset M$ – říká, že orbity startující z $x_0 \in \Omega_\ell$ mají hromadné body pouze v M; vzhledem ke kompaktnosti (omezenost Ω_ℓ) to už nutně znamená, že orbity se blíží k M ve smyslu distance množin. Speciálně, pokud M obsahuje jediný bod, řešení konvergují k tomuto bodu. (Srovnej úlohy 5, 6).

Příklad – dokončení. Volíme $V = x^2 + y^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\ell > 0$ libovolné. Tedy

$$R = \big\{(x, y) \in \Omega_\ell;\ \dot{V} = 0\big\} = \big\{(x, 0);\ -\ell < x < \ell\big\}$$

Ovšem pokud $(x, 0) \in R$, $x \neq 0$, z rovnice je $y' = -x \neq 0$, tj. řešení ihned opustí množinu R. Jedinou invariantní podmnožinou R je tedy $M = \{(0, 0)\}$. Z výše uvedené věty plyne, že ω-limitní množina každého bodu z $\Omega_\ell = \big\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq \ell^2\big\}$ je počátek $(0, 0)$, tj. počátek je asymptoticky stabilní.