Úlohy na dynamické systémy

1. Najděte explicitně řešicí funkci $\varphi(t,x)$ pro rovnice/systémy

(i) $x' = x^p$, $p \in \mathbb{R}$ (pro $x > 0$)

(ii) $x'' + x = 0$ (přepište jako systém 2. rovnic)

(iii) $x' = x + \ln y$, $y' = -y$ (pro $y > 0$)

(iv) $x' = y^2 - x^2$, $y' = -2xy$ (užijte komplexní tvar $z = x + iy$)

Ověřte, že (alespoň lokálně) je splněna vlastnost dynamického systému: $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$.

2. Najděte dynamický systém v $\mathbb{R}^2$ tak, že pro vhodný počáteční bod x_0:

(i) $\omega(x_0) = \emptyset$

(ii) $\omega(x_0)$ je jednotková kružnice

(iii) $\omega(x_0)$ je dvoubodová

(iv) $\omega(x_0)$ je přímka

(v) $\omega(x_0)$ je jednotkový kruh

3. (Nesouvislá ω-limitní množina) Uvažujte systém rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= -y(1-x^2),\\
y' &= x + y(1-x^2).
\end{aligned}
$$

Omezte se na svislý pás $|x| < 1$, přičemž:
(i) najděte a analyzujte stacionární body
(ii) identifikujte křivky, kde x' resp. y' mění znamení a načrtněte průběhy řešení
(iii) ukažte, že pro každý bod $x_0 \neq 0$ je $\omega(x_0)$ rovna sjednocení přímek $x = \pm 1$

4. Nechť $\varphi(t,x)$ je hladký dynamický systém v R^n. Ukažte, že pro každé pevné x_0 je funkce $x(t) := \varphi(t,x_0)$ řešením rovnice $x' = f(x)$, kde $f(\xi) := \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,\xi)$.

5. Dokažte tvrzení: máme dynamický systém v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\omega(x_0) = \{z\}$. Potom $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x_0) = z$. (V řeči diferenciálních rovnic: řešení vycházející z bodu x_0 konvergují k z pro $t \to \infty$.)

6. Nechť (φ,Ω) je dynamický systém; nechť $\gamma^+(x_0)$ je relativně kompaktní. Potom $\varphi(t,x_0) \to \omega(x_0)$ pro $t \to \infty$ ve smyslu distance[1] množin, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,x_0),\omega(x_0)) = 0.$$

[1] Značíme $\operatorname{dist}(a,M) = \inf_{x\in M} |a-x|$.

7. Najděte takový dynamický systém v $\mathbb{R}^2$ (nebo ukažte, že neexistuje), že $\omega(x_0)$ je jednotková kružnice

(i) pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(ii) pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$

8. Nechť $\omega(x_0)$ není souvislá. Pak omezené komponenty $\omega(x_0)$ nejsou izolované (každá omezená komponenta má nulovou vzdálenost od jiné komponenty).