Řešení

1) (i) je-li $p = 1$, pak $x_0 \mapsto x_0 e^t$, $t \in \mathbb{R}$; pro $p \neq 1$ máme $x_0 \mapsto [t(1-p) + x_0^{1-p}]^{\frac{1}{1-p}}$, s omezením $t > -\frac{x_0^{1-p}}{1-p}$, je-li $p < 1$, a s omezením $t > -\frac{x_0^{1-p}}{1-p}$, je-li $p > 1$.
(ii) $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t)$; uvažte, že $\varphi(t, \cdot)$ je lineární
(iii) $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 e^t + (\ln y_0 - t)(e^t - 1), y_0 e^{-t})$
(iv) rovnice má obecné řešení $z(t) = z_0/(1 + tz_0)$, orbity jsou kružnice se středy na imaginární ose

2) (i) $\varphi(t, x) = t + x$, $t \in \mathbb{R}$; (ii) systém generovaný rovnicemi (v polárních souřadnicích) $r' = r - r^2$, $\phi' = -1$; řešením je kružnice $r = 1$ a počátek (stacionární bod). Všechna ostatní řešení jsou spirály, navíjející se k jednotkové kružnici coby ω-limitní množině. V kartézských souřadnicích jde o soustavu

$$x' = x + y - x\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$y' = -x + y - y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

(iii) nemá řešení – je-li $\omega(x_0) = \{a, b\}$, volme $\delta > 0$ takové, že $U(a, 2\delta) \cap U(b, 2\delta) = \emptyset$. Ovšem orbit bodu x_0 protíná kružnici $\{|x| = \delta\}$ pro libovolně velké časy; z kompaktnosti zde leží další prvek $\omega(x_0)$, což je spor. (iv) užijte případ (ii) a konformní zobrazení roviny, které převádí kružnici na přímku. (v) nemá řešení, $\omega(x_0)$ musí mít prázdný vnitřek.

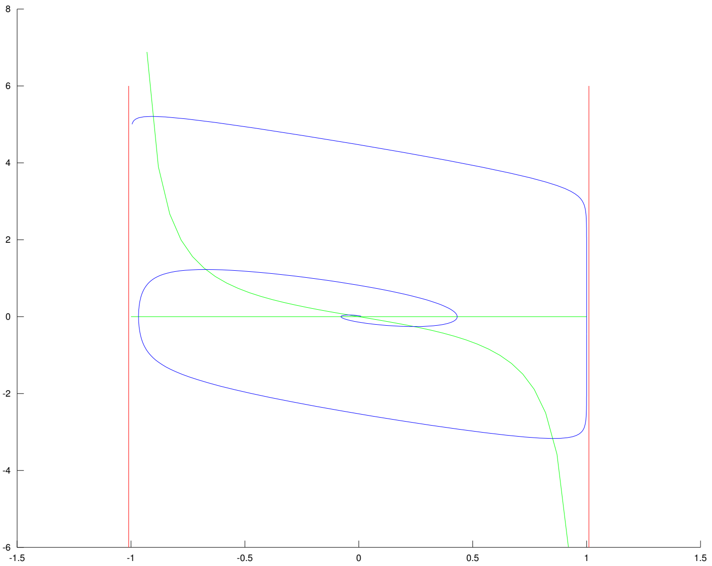
3) (i) $(0, 0)$ – nestabilní vír, z nějž vybíhají spirály proti směru hodinových ručiček; (ii) $x' = 0$ pro $y = 0$, $y' = 0$ pro $y = x/(x^2 - 1)$, což naznačuje týž spirálovitý průběh; (iii) z Bendixson-Dulacova kritéria (volme $B = 1/(x^2 - 1)$) plyne neexistence periodických řešení uvnitř pásu. Tedy posloupnost ξ_k průsečíků (netriviálního) řešení s úsečkou $\{(x, 1);\ 0 < x < 1\}$ je prostá (rostoucí) a nemůže mít hromadný bod *uvnitř* pásu (neboť ten by musel ležet na periodickém orbitu, jak plyne z důkazu Poincaré-Bendixsonovy věty). Nutně $\xi_k \to 1-$ a spirála se tedy „lokálně stejnoměrně“ blíží k přímce $x = 1$. Symetrický argument na druhé straně. — Viz obrázek (řešení modré, izočáry zelené, omega-limitní množina červená).

4) Uvažte, že pro t_0 pevné je

$$x(t_0 + t) = \varphi(t_0 + t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_0, x_0)).$$

Odsud (derivováním v $t = 0$) plyne

$$x'(t_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \varphi(t_0, x_0)) = f(\varphi(t_0, x_0)) = f(x(t_0)).$$



Obrázek 1: Úloha 3

5) Pokud z není limitou, pak orbit $\varphi(t, x_0)$ se nachází mimo nějaké ε-okolí pro libovolně velké časy. Zároveň se (neboť $z \in \omega(x_0)$) nachází v tomto okolí pro libovolně velké časy. Tedy existuje posloupnost $t_k \to +\infty$, že $|\varphi(t_k, x_0) - z| = \varepsilon$. Pak by ovšem na (kompaktní) sféře $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - z| = \varepsilon\}$ existoval další prvek $\omega(x_0)$ – spor.

6) Pokud závěr neplatí, existuje $\delta > 0$ a posloupnost $t_k \to \infty$ tak, že $\mathrm{dist}(\varphi(t_k, x_0), \omega(x_0)) \geq \delta$. Díky předpokladu kompaktnosti má $\varphi(t_k, x_0)$ hromadný bod, který však je prvkem $\omega(x_0)$ – spor.

7) (i) Orbity bude tvořit systém spirál začínajících v počátku nebo v nekonečnu a přimykajících se k jednotkové kružnici. (ii) Nelze, $\alpha(x_0)$ by pro $|x_0| < 1$ musela být také částí jednotkové kružnice, tedy celá kružnice podle Poincaré-Bendixsonovy věty. Malá úsečka protínající kolmo kružnici je transverzálou, průsečíky s orbitou na ní musí tvořit monotónní posloupnost, což je spor s tím, že kružnice je α i ω limitní množina.

8) Uvažujme omezenou izolovanou komponentu K a $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < \varepsilon\}$. Pokud $\gamma_+(x_0)$ zůstane pro $t \geq t_0$ v U_ε, máme spor s nesouvislostí $\omega(x_0)$. Pokud orbita množinu U_ε bude stále opouštět, bude mít hromadný bod v $\overline{U_\delta} \setminus U_{\delta/2}$, a to pro každé $\varepsilon > \delta > 0$. Což je spor s izolovaností K.