Dynamické systémy

Definice 1. Dynamickým systémem rozumíme dvojici (φ, Ω), kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $\varphi(t,x) : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ je spojité zobrazení, splňující „semigrupovou vlastnost“

(i) $\varphi(0,x) = x$ pro $\forall x \in \Omega$

(ii) $\varphi(s, \varphi(t,x)) = \varphi(s+t, x)$ pro $\forall x \in \Omega$, t, $s \in \mathbb{R}$

Kanonický příklad. Diferenciální rovnice

$$x' = f(x)\,, \tag{1}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je daná funkce, určuje dynamický systém (φ, Ω) pomocí řešicí funkce

$$\varphi : (t, x_0) \mapsto x(t)\,, \tag{2}$$

kde $x(t)$ je řešení (1) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Z obecných vět o existenci a jednoznačnosti plyne, že pokud je $f \in C^k$, $k \geq 1$, je φ korektně definováno (minimálně pro t blízká 0) a φ je také třídy C^k.

Poznámka. Naopak, lze ukázat, že každý dynamický systém (za předpokladu $\varphi \in C^1$) vzniká jako řešicí funkce určité diferenciální rovnice tvaru (1). Viz úloha 4 níže. Při studiu této teorie je tedy dobré mít na mysli vzájemně jednoznačnou korespondenci: rovnice $\iff$ dynamický systém.

Poznamenejme ještě, že speciálně pro lineární rovnici

$$x' = Ax$$

kde A je konstantní matice, lze odpovídající dynamický systém napsat explicitně pomocí exponenciály matice:

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}\,.$$

Poznámka. Otázka, zda pro danou rovnici je odpovídající dynamický systém definován pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (tj. otázka globální existence řešení) je obecně, tedy pro nelineární f, značně netriviální problém. Jednoduché příklady ukazují, že řešení může utéci do nekonečna (tzv. „blow-up“) v konečném čase. Následující kritérium však poslouží ve většině rozumných aplikací.

Tvrzení 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina, nechť řešení rovnice* (1) *s počáteční podmínkou v Ω nemohou opustit Ω. Potom tato řešení jsou definována pro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Jak v praxi zajistit, aby řešení nemohla opustit Ω ?

1. vektor $f(x)$ na hranici směřuje striktně dovnitř Ω – protože řešení jsou křivky $x = x(t)$, jejichž tečnou je $f(x(t))$, nelze v takovém bodě dosáhnout hranice „zevnitř“.

2. hranice $\partial\Omega$ sama je tvořena křivkami řešení a stacionárními body – také zde nelze hranici překročit (byl by to spor s jednoznačností řešení).

Definice 2. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Množina M se nazve *invariantní*, jestliže $x \in M$ implikuje $\varphi(t,x) \in M$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$.

Klíčový objekt pro studium chování dynamických systémů pro velké časy je obsahem následující definice.

Definice 3. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, nechť $x_0 \in \Omega$. Omega-limitní množinou bodu x_0 rozumíme

$$\omega(x_0) = \big\{ y \in \Omega; \;\; \text{existují } t_k \to \infty \text{ tak, že } \varphi(t_k, x_0) \to y \; \big\} .$$

Analogicky definujeme alfa-limitní množinu

$$\alpha(x_0) = \big\{ y \in \Omega; \;\; \text{existují } t_k \to -\infty \text{ tak, že } \varphi(t_k, x_0) \to y \; \big\} .$$

Věta 2. *$\omega(x_0)$ je uzavřená a invariantní. Je-li navíc pozitivní trajektorie*

$$\gamma^+(x_0) = \big\{ \varphi(t, x_0); \; t \geq 0 \big\}$$

relativně kompaktní, je $\omega(x_0)$ neprázdná, kompaktní a souvislá.

Poznámka. Omega-limitní množina sestává ze všech hromadných bodů dopředné trajektorie; přesněji vzato jsou to právě ty body, v jejichž libovolně malém okolí se řešení ocitne pro libovolně velké časy.
Podmínka relativní kompaktnosti (v případě $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní omezenosti příslušného orbitu) v druhé části věty je podstatná: viz úloha 2, 3 dále.