Úlohy na centrální varietu a její aproximaci.

1. Ukažte, že systém

$$x' = -x^3, \qquad y' = -y$$

má centrální varietu $\phi(x) = 0$. Ukažte, že

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp(-1/2x^2), & x > 0 \end{cases}$$

je také centrální varieta. Nalezněte další centrální variety.

2. Ukažte, že (žádná) centrální varieta systému

$$x' = -x^3, \qquad y' = -y + x^2$$

není analytická v okolí 0.

3. Předpokládejte situaci $m = n = 1$, tj. $A = a \ge 0$, $B = -b < 0$. Nechť f, g jsou C^2 a nechť ϕ je C^2 funkce, splňující $M\phi = 0$ a $\phi(0) = 0$. Ukažte, že nutně $\phi'(0) = 0$ a vyjádřete $\phi''(0)$ pomocí derivací funkcí f a g. (Návod: Taylorův rozvoj.)

4. Nechť $F(x)$ je spojitá na okolí 0, $F(0) = 0$ a nechť $F(x) = ax^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$, $x \to 0$, kde $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete stabilitu bodu 0 pro rovnici $x' = F(x)$.

5. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = xy, \qquad y' = -y + x^2.$$

6. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = xy, \qquad y' = -y - x^2.$$

7. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = e^{2xy} - e^{x^3}, \qquad y' = e^{x^2} - e^{2y}.$$

8. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = y \sin x + x \sin y, \qquad y' = \ln(1 - y) + \sin x^2.$$

9. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = x^2 - 4xy + y^2, \qquad y' = -10y + x^2y^2 + x^5.$$

10. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = ax^3 + x^2y, \qquad y' = -y + y^2 + xy - x^3,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

11. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$\begin{aligned} x' &= y^2 + z^3, \\ y' &= -y + x^2, \\ z' &= -2z - x^2. \end{aligned}$$

12. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= yv \\ y' &= yu \\ u' &= -u + x^2 + 2xy^3 \\ v' &= -v + y^2 + 2x^2y^2 \end{aligned}$$

Ukažte, že existuje centrální varieta tvaru $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Aproximujte ji vhodnou kvadratickou funkcí. Vyšetřete stabilitu počátku pro původní systém.

13. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 + yz \\ y' &= x - y^2 \\ z' &= xy - z \end{aligned}$$

Ověřte, že existuje c.v. tvaru $z = \Phi(x, y)$. Aproximujte ji vhodnou kvadratickou funkcí. Vyšetřete stabilitu redukované rovnice použitím věty o stabilitě Hopfovy bifurkace.