Řešení.

1) Ověřte, že $M[\phi](x) = 0$, tj. $-x^3\phi'(x) = -\phi(x)$. Odtud: je-li $\phi(x)$ c.v., je také $c\phi(x)$ c.v.

2) Sporem: $\phi(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^2$ je c.v. Potom $M[\phi](x) = -x^3\phi'(x) + \phi(x) - x^2 = 0$, což dává $a_2 = 1$ a obecně $a_{k+2} = ka_k$, což je řada s nulovým poloměrem konvergence.

3) Nechť

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \beta x + \gamma x^2 \\ f(x,y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ g(x,y) &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 \end{aligned}$$

jsou příslušné Taylorovy rozvoje druhého řádu. Dosazením do (3) plyne $\beta = 0$ (členy u x) a dále $\gamma = b_{22}/(2a+b)$ (členy u x^2), neboli

$$\phi''(0) = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)}{2a+b}$$

4) Je $x' = ax^n(1+\mathcal{O}(x))$, tedy x' má stejné znamení jako ax^n v intervalech $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$. Asymptotická stabilita pro $a < 0$ a n liché; jinak nestabilita.

5) Aproximace $\psi(x) = cx^2$; při volbě $c = 1$ je $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^4)$. Redukovaná rovnice $p' = p^3 + \mathcal{O}(p^5)$ je nestabilní.

6) Aproximace $\psi(x) = cx^2$; při volbě $c = -11$ je $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^4)$. Redukovaná rovnice $p' = -p^3 + \mathcal{O}(p^5)$ je asymptoticky stabilní.

7) Aproximace $\psi(x) = cx^2$ při volbě $c = 1/2$ dává $M[\psi](x) = 0$, tedy $\phi(x) = x^2/2$ *je* c.v. Redukovaná rovnice $p' = 0$ je stabilní, není asymptoticky stabilní.

8) Aproximace $\psi(x) = cx^2$; při volbě $c = 1$ je $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^3)$. Redukovaná rovnice $p' = 2p^3 + \mathcal{O}(p^4)$ je nestabilní.

9) Aproximace $\psi(x) = 0$ dává $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^5)$. Redukovaná rovnice $p' = p^2 + \mathcal{O}(p^6)$ je nestabilní.

10) Aproximace $\psi(x) = 0$ dává $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^3)$. Redukovaná rovnice $p' = ap^3 + \mathcal{O}(p^5)$ je asymptoticky stabilní pro $a < 0$, nestabilní pro $a > 0$. Pro $a = 0$ potřebujeme lepší aproximaci. Nestačí $\psi(x) = cx^2$; avšak $\psi(x) = cx^3$ při volbě $c = -1$ dává $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^4)$. Redukovaná rovnice $p' = -p^5 + \mathcal{O}(p^6)$ je asymptoticky stabilní.

11) Centrální varieta má tvar $y = \phi_1(x)$, $z = \phi_2(x)$. Chyba aproximace má složky

$$\begin{aligned} M_1[\psi](x) &= \psi_1'(x)\big(\psi_1^2(x) + \psi_2^3(x)\big) + \psi_1(x) - x^2, \\ M_2[\psi](x) &= \psi_2'(x)\big(\psi_1^2(x) + \psi_2^3(x)\big) + 2\psi_2(x) + x^2. \end{aligned}$$

Volba $\psi(x) = 0$ dává $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^2)$, což nestačí. Volba $\psi_1(x) = x^2$, $\psi_2(x) = -x^2/2$ dá $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^5)$. Odtud redukovaná rovnice $p' = p^4 + \mathcal{O}(p^6)$ je nestabilní.

12) Centrální směry (x, y), A je nulová matice 2×2; stabilní směry (u, v), B je minus jednotková matice. Aproximace má dvě složky (v argumentech x, y, jež vynecháváme) :

$$\begin{aligned} M_1[\phi, \psi] &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\psi y + \frac{\partial \phi}{\partial y}\phi y + \phi - x^2 - 2xy^3 \\ M_2[\phi, \psi] &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\psi y + \frac{\partial \psi}{\partial y}\phi y + \psi - y^2 - 2x^2y^2 \end{aligned}$$

Nabízí se volba $\phi = x^2$ a $\psi = y^2$, pro niž dokonce $M_1 = M_2 = 0$, tj. máme c.v. přesně. Redukovaná soustava má tvar $p' = q^3$, $q' = p^2 q$ a vidíme, že řešení např. v prvním kvadrantu se vzdaluje od počátku v obou složkách. Tedy počátek není stabilní.

13) Centrální směry $X = (x, y)$, spektrum A je $\{\pm i\}$; stabilní směr z, kde $B = (-1)$. Dále

$$M\Phi = (-y + x^2 + y\Phi)\Phi_x + (x - y^2)\Phi_y + \Phi - xy$$

Aproximace tvaru $\Psi = a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2$ nás zbaví všech kvadratických členů (tedy chyba řádu $|X|^3$), právě když $a_1 = -1/5$, $a_2 = 1/10$, $a_3 = 1/5$. Redukovaná rovnice (členy do třetího řádu včetně) je

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 - \frac{1}{5}x^2 y + \frac{1}{5}xy^2 + \frac{1}{5}y^3 + \dots \\ y' &= x - y^2 \end{aligned}$$

Aplikujeme Větu 2 z kapitoly ,,Bifurkace"; d není relevantní neboť formálně $\mu = 0$; dále $\omega_0 = 1$ a vypočteme $a = 1/40$, tedy počátek není stabilní.