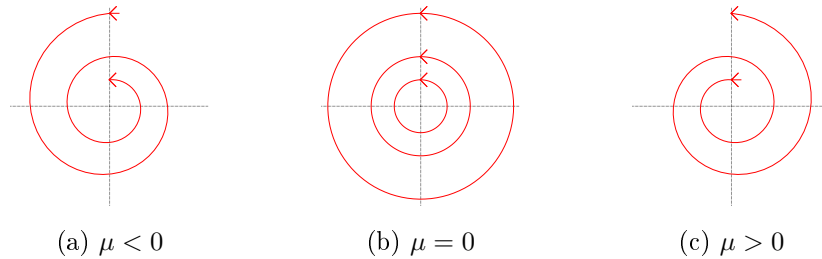


Hopfova bifurkace.

Motivační příklad. Uvažujme lineární systém

$$\begin{aligned}x' &= \mu x - y \\y' &= x + \mu y.\end{aligned}$$

Spektrum matice je $\{\mu \pm i\}$; počátek ztrácí stabilitu v okamžiku $\mu = 0$. Průběh řešení vidíme na Obrázku 13.



Obrázek 13: Ztráta stability lineární soustavy

Řešení běží po spirále, jejíž rychlost zavínavání/rozvínavání se mění s parametrem μ . Fakt, že pro vhodnou kritickou hodnotu μ spirála degeneruje v uzavřenou křivku, tj. objeví se periodická řešení, se jeví jako „robustní“, tj. měl by nastat i za přítomnosti členů vyššího řádu. Přesně to je obsahem Hopfovy věty o bifurkaci.

Věta 1 (Hopf.). *Pro (x, y, μ) v okolí $(0, 0, 0)$ uvažujme systém*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

kde matice A_μ závisí na parametru μ . Předpokládejme, že $\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)\}$, kde $\alpha(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ jsou C^2 funkce a platí:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \omega(0) \neq 0. \quad (8)$$

Funkce f , g jsou poruchy vyššího řádu, tj.

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \nabla_{x,y} f = 0, \quad \nabla_{x,y} g = 0, \quad \text{v bodě } (0, 0, \mu).$$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^1 funkce $\varphi : (0, \delta) \rightarrow (-\Delta, \Delta)$ taková, že pro každé $a \in (0, \delta)$ má systém (7) při volbě $\mu = \varphi(a)$ netriviální periodické řešení, procházející bodem $(x, y) = (a, 0)$.

Klíčový je předpoklad (8) zaručující, že spektrum překročí imaginární osu nenulovou rychlostí a při striktně nenulové imaginární části.

Hlavní výsledek věty – existence netriviálních periodických řešení blízko počátku – z praktického hlediska mnoho neříká. Proto se hodí následující zpřesnění (s mimořádně komplikovaným důkazem).

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 1, necht' navíc*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom existuje hladká záměna souřadnic taková, že $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se chová kvalitativně stejně jako řešení rovnice

$$r' = d\mu r + ar^3, \quad (9)$$

kde $d = \alpha'(0)$ a konstantu a lze vypočíst ze vztahu

$$16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}],$$

kde f_{xy} atd. značí příslušnou parciální derivaci, vypočtenou v bodě $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$.

Příklad 9. Mějme rovnice

$$\begin{aligned} x' &= -\mu x - y \\ y' &= x + y^3 \end{aligned}$$

To je systém tvaru (7) s $f = 0$, $g = y^3$ a

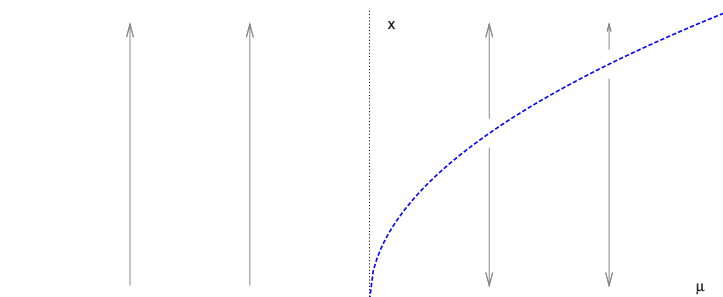
$$A_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrum A_μ je $\{-\mu/2 \pm i\sqrt{4 - \mu^2/4}\}$ (pro μ malá), předpoklady obou vět jsou splněny.

Máme $d = -1/2$, $\omega_0 = 1$ a $a = 3/8$; rovnice (9) dostává tvar

$$r' = r\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}r^2\right).$$

Průběh řešení načrtneme do bifurkačního diagramu v rovině (μ, r) . Pro $r > 0$ odpovídá podmínka $r' = 0$ kružnici, tj. netriviálnímu periodickému řešení. Tato řešení se objeví pro $\mu > 0$ a jsou nestabilní.



Poznámka. Věta 2 speciálně umožňuje určit stabilitu počátku pro $\mu = 0$, kdy se (9) redukuje na $r' = ar^3$. Všimněte si, že v daném případě klasické věty o linearizované stabilitě nelze použít, neboť spektrum matice je ryze imaginární. O stabilitě tedy rozhodnou členy vyššího řádu a je pozoruhodné, že veškerá informace je obsažena v jediné konstantě a .

To lze použít i ve zjednodušeném případě, kdy bifurkační parametr ignorujeme (resp. je roven 0).

Příklad 10. Máme systém

$$\begin{aligned}x' &= -y + x^2 \\y' &= x + x^2\end{aligned}$$

Matice linearizace v počátku má žádaný tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že $a = -1/4$, a tedy počátek je stabilní. Pokuste se odvodit stabilitu počátku jinými metodami – není to snadné!

Příklad 11. Uvažujme rovnici

$$x'' + (x^2 - \mu)x' + 2x + x^3 = 0,$$

kterou obvyklou substitucí $y = x'$ převedeme na systém

$$x' = y, \tag{10}$$

$$y' = -2x + \mu y - x^2 y - x^3. \tag{11}$$

Jsou splněny předpoklady Věty 1, nikoliv však Věty 2, neboť

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$$

tedy $\sigma(A_\mu) = \{\mu/2 \pm i/2\sqrt{8 - \mu^2}\}$, avšak A_μ nemá požadovaný antisymetrický tvar pro $\mu = 0$. Problém řeší následující

Pomocný výpočet. Je-li A reálná matice 2×2 se spektrem $\{\alpha \pm i\omega\}$, je nutně podobná matici

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Matici přechodu spočteme následujícím trikem: najdeme vektor $U \in \mathbb{C}^2$ takový, že $AU = (\alpha - i\omega)U$. Rozklad na reálnou a imaginární část $U = u + iv$, kde $u, v \in \mathbb{R}^2$, dává

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u + \omega v \\ Av &= -\omega u + \alpha v \end{aligned}$$

jinými slovy, A má vůči bázi $\{u, v\}$ tvar B . Pro transformační matici T se sloupci u, v (v tomto pořadí) tedy platí

$$A = TBT^{-1}, \quad B = T^{-1}AT.$$

Má-li tedy původní rovnice tvar

$$X' = AX + F(X), \tag{12}$$

kde $X \in \mathbb{R}^2$, vede substituce $X = TY$ čili $Y = T^{-1}X$ na rovnici

$$Y' = BY + T^{-1}F(TY). \tag{13}$$

Pokračování příkladu. V našem konkrétním případě má A_0 spektrum $\{\pm i\sqrt{2}\}$, tedy $U = (U_1, U_2)$ hledáme z rovnice

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Možné řešení je $U = (i\sqrt{2}, 2)$; odpovídající transformační matice jsou

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Chápeme nyní (10-11) jako systém (12), tj. $X = (x, y)$, $A = A_\mu$ a

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2y - x^3 \end{pmatrix}.$$

Substitucí $X = TY$, kde $Y = (u, v)$, dostaneme – viz (13) – pro $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}u' &= -\sqrt{2}v - 2uv^2 - \sqrt{2}v^3, \\v' &= \sqrt{2}u,\end{aligned}$$

což je požadovaný tvar. Lze aplikovat Větu 2, dle které se $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ chová jako řešení rovnice

$$r' = d\mu r + ar^3.$$

Zde $d = 1/2$, $a = -1/4$, odkud počátek stabilní pro $\mu \leq 0$, zatímco pro $\mu > 0$ je počátek nestabilní a objeví se stabilní periodické orbity o poloměru cca $r = \sqrt{2\mu}$.