

## Bifurkace v rovině.

**Příklad 5** (Bifurkace sedlo-uzel – vznik symbiózy.). Zabýváme se soustavou rovnic

$$a' = a(K - a) + \frac{ap}{p + 1} \quad (2)$$

$$p' = -\frac{p}{2} + \frac{ap}{p + 1} \quad (3)$$

popisující symbiózu mezi rostlinou  $p$  a hmyzem (opylovačem)  $a$ . Modře je vyznačen člen popisující vzájemnou pozitivní vazbu. V nepřítomnosti hmyzu ( $a = 0$ ) rostliny exponenciálně hynou, zatímco pro  $p = 0$  (žádné rostliny) má  $a$  limitu  $K$  (=přirozená kapacita prostředí).

Studujeme chování řešení v prvním kvadrantu ( $a, p \geq 0$ ) v závislosti na parametru  $K$ . Systém má vždy stacionární body  $(0, 0)$  a  $(K, 0)$ ; striktně uvnitř prvního kvadrantu platí

$$a' = 0 \iff p = \frac{a - K}{K + 1 - a} \quad (4)$$

$$p' = 0 \iff p = 2a - 1 \quad (5)$$

Současné splnění těchto rovnic odpovídá existenci dalších ekvilibrií a vede na kvadratickou rovnici

$$2a^2 - 2a(K + 1) + 1 = 0 \quad (6)$$

s diskriminantem  $D = 4(K + 1)^2 - 8$ , jenž je roven 0 právě když  $K$  nabývá kritické hodnoty

$$K_0 = \sqrt{2} - 1.$$

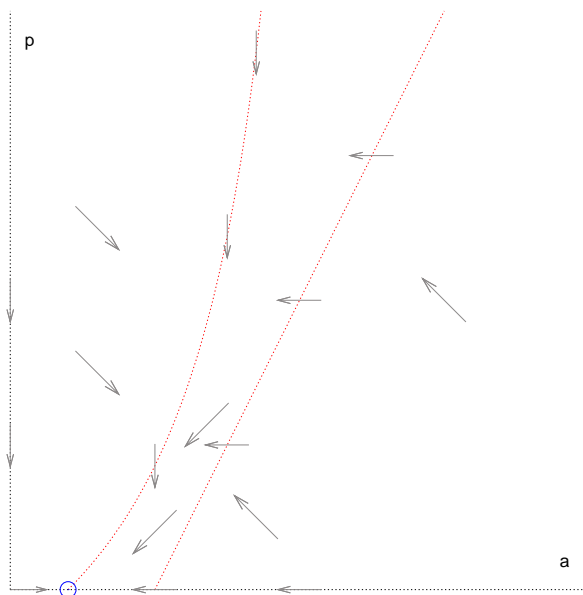
Rozlišujeme tři případy (viz Obrázky 5, 6, 7).

(i)  $K < K_0$  – rovnice (6) nemá řešení, tj. křivky (4), (5) (v obrázku červené) se neprotínají. Z vyšetření směru průběhu řešení (šedé šipky) je patrné, že všechna řešení mají pro  $t \rightarrow \infty$  limitu v bodě  $(K, 0)$  (modrý kroužek).

(ii) Pro  $K = K_0$  se křivky (4), (5) dotýkají, čímž vzniká stacionární bod

$$(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1).$$

Matice linearizace v tomto bodě má jedno nulové a jedno záporné vlastní číslo. Stabilní varieta (odpovídající zápornému vlastnímu číslu) je zhruba naznačena šipkami; řešení ležící nad nimi (nebo v sektoru B) mají za limitu bod  $(x_0, y_0)$ , zatímco řešení v sektoru A směřují opět do  $(K, 0)$ , tedy  $(x_0, y_0)$  není stabilní.



Obrázek 5: Subkritický případ  $K < K_0$

(iii) Další zvětšení  $K$  vede k rozdělení  $(x_0, y_0)$  na stabilní uzel a nestabilní sedlo. Konkrétně pro  $K = K_0 + 0.05$  máme

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &\doteq (0.542, 0.085) && \text{(sedlo)} \\ (x_2, y_2) &\doteq (0.922, 0.844) && \text{(uzel)} \end{aligned}$$

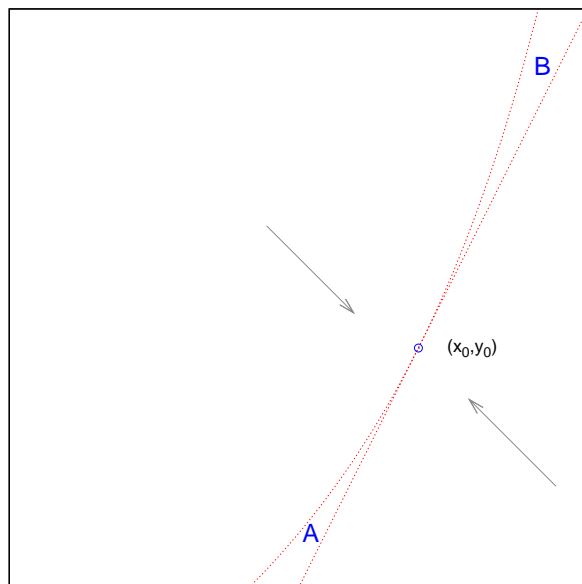
Řešení v sektoru C směřují k bodu  $(x_2, y_2)$ .

*Poznámka.* Všimněte si, že v okamžiku bifurkace ( $K = K_0$ ) stacionární bod  $(x_0, y_0)$  není hyperbolický. Lze ukázat, že to je nutná podmínka bifurkace, neboť hyperbolické stacionární body jsou robustní (chování řešení v jejich okolí se nemění při hladké perturbaci soustavy.)

**Příklad 6** (Jednoduchá bifurkace sedlo-uzel). Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \varepsilon)x - y + x^2 \\ y' &= (1 + \varepsilon)y - x + y^2 \end{aligned}$$

Pro  $\varepsilon = 0$  je v počátku (jediný) stacionární bod, který je nestabilní a nehyperbolický (spektrum linearizace  $\{0, 2\}$ ). Obrázek 8 – izočáry  $\{y' = 0\}$  červené,  $\{x' = 0\}$  modré; řešení černé.



Obrázek 6: Kritický případ  $K = K_0$

Pro  $\varepsilon > 0$  malé se počátek stává nestabilním uzlem (spektrum  $\{\varepsilon, 2 + \varepsilon\}$ ). Vzniká další stacionární bod  $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ : sedlo se spektrem  $\{-\varepsilon, 2 - \varepsilon\}$ . Viz Obrázek 9; orbit spojující ekvilibria je světle modrý.

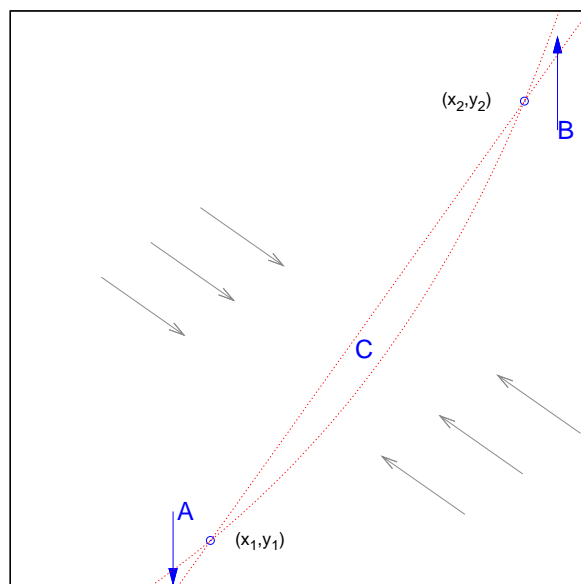
**Příklad 7** (Porušení homoklinického orbitu). Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \varepsilon y + x - x^2 \end{aligned}$$

Pro  $\varepsilon = 0$  máme dva stacionární body: počátek (sedlo se spektrem  $\{\pm 1\}$ ) a bod  $(1, 0)$ , jehož stabilitu linearizací nelze určit (spektrum  $\{\pm i\}$ ). Funkce  $V(x, y) = y^2 - x^2 + 2x^3/3$  je první integrál, neboli každé řešení splňuje  $V(x, y) = C$  s vhodným  $C$ , viz Obrázek 10. Pro  $C = 0$  dostáváme počátek a příslušnou stabilní (zelená) a nestabilní (červená) varietu, splývající v pravé polorovině v jeden homoklinický orbit (tmavě modrá).

Pro  $C \in (-1/3, 0)$  jsou  $V(x, y) = C$  jednoduché uzavřené křivky, odpovídající periodickým řešením kolem bodu  $(1, 0)$ . Odsud si lehce rozmyslíme, že tento bod je stabilní, leč není asymptoticky stabilní.

Pro  $\varepsilon > 0$  resp.  $\varepsilon < 0$  je nyní  $V(x, y)$  rostoucí resp. klesající podél řešení. Bod  $(1, 0)$  je nestabilní resp. asymptoticky stabilní.



Obrázek 7: Superkritický případ  $K > K_0$

Homoklinický orbit se „roztrhne“. Pro  $\varepsilon > 0$  se stabilní část stane heteroklinickým orbitem, spojujícím počátek s (nyní nestabilním) bodem  $(1, 0)$ , na Obrázku 11(a) zeleně. Nestabilní část (červená) utíká do nekonečna.

Pro  $\varepsilon < 0$  spojuje nyní nestabilní varieta (Obrázek 11(b), červená) počátek se (stabilním) ekvilibriem  $(1, 0)$ ; stabilní část variety (zelená) přibíhá z nekonečna.

*Poznámka.* Pro  $\varepsilon = 0$  nastává v bodě  $(1, 0)$  takzvaná *Hopfova bifurkace*, kterou se budeme podrobněji zabývat níže.

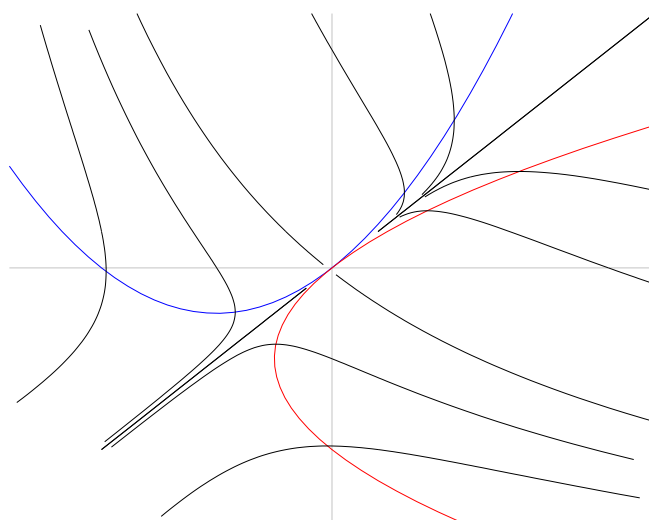
**Příklad 8** (Porušení heteroklinického orbitu). Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned}x' &= \lambda + 2xy \\y' &= 1 + x^2 - y^2\end{aligned}$$

Pro  $\lambda = 0$  vidíme řešení na Obrázku 12(a). Množina  $x' = 0$  resp.  $y' = 0$  je vyznačena modře resp. červeně. Existují dva stacionární hyperbolické body  $(0, \pm 1)$ . Jde o sedla spojená heteroklinickým orbitem (zelená).

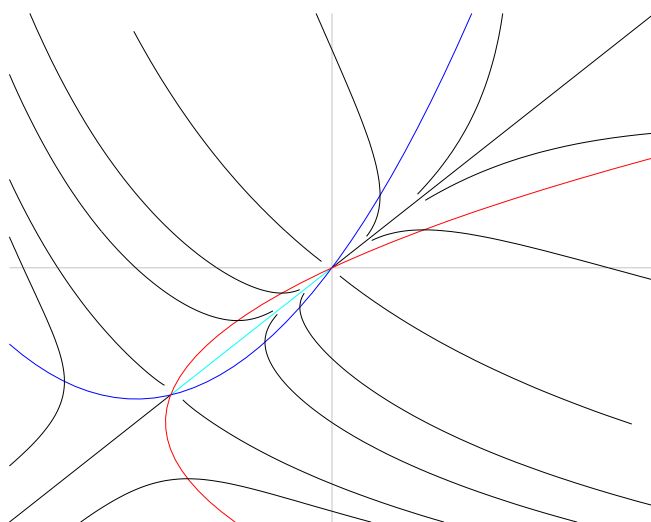
Pro  $\lambda < 0$  se oba sedlové body mírně posunou, typ stability zůstane zachován. Heteroklinický orbit se však stává globálně definovaným řešením (Obrázek 12(b), zelená).

*Poznámka.* Homoklinický orbit = orbit spojující stabilní a nestabilní varietu *téhož* stacionárního bodu (*ομοος*, řecky „stejný“). Heteroklinický orbit =

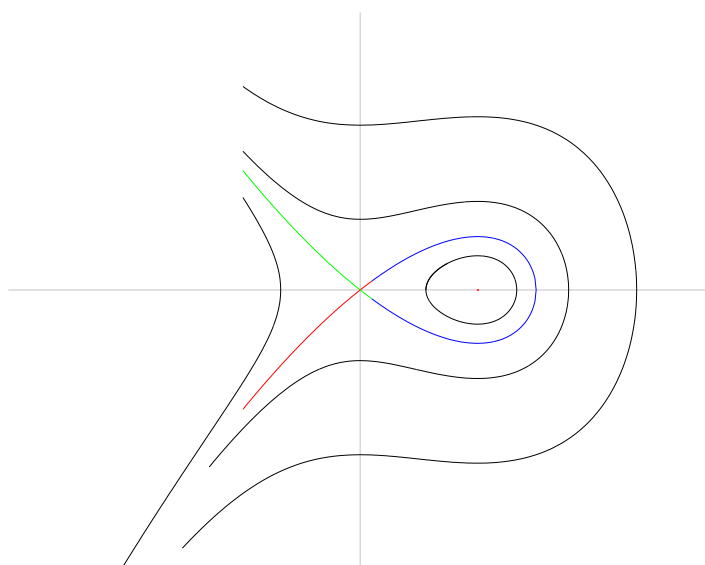


Obrázek 8: Příklad 6 pro  $\varepsilon = 0$

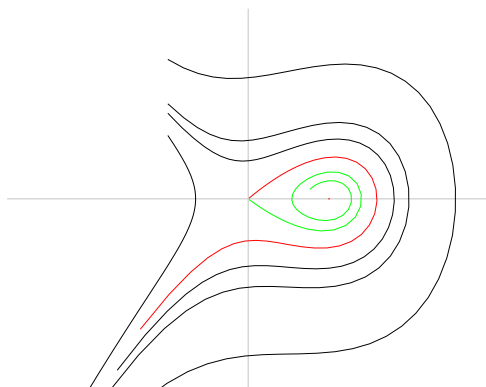
orbit spojující stabilní a nestabilní varietu *dvou různých* stacionárních bodů ( $\varepsilon\tau\varepsilon\rho\sigma$ , řecky „různý“).



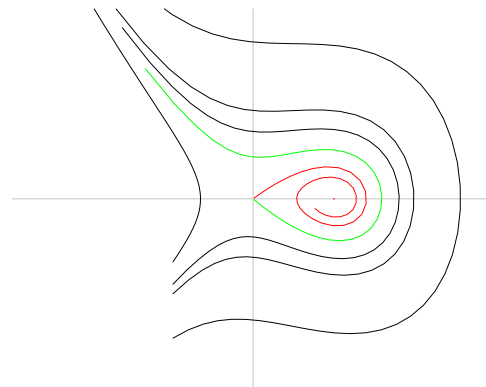
Obrázek 9: Příklad 6 pro  $\varepsilon > 0$



Obrázek 10: Příklad 7 pro  $\varepsilon = 0$

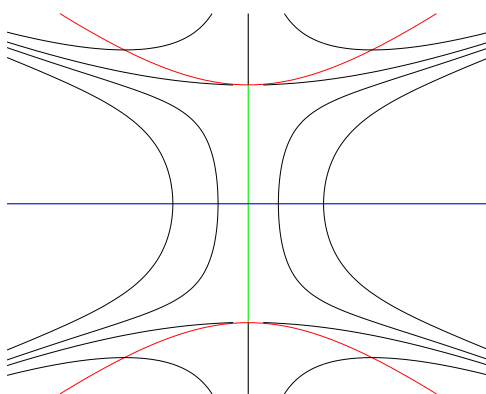


(a)  $\varepsilon > 0$

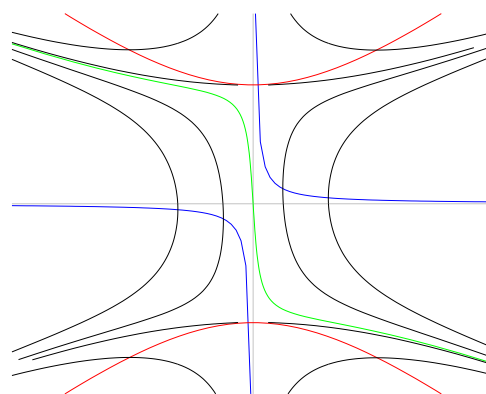


(b)  $\varepsilon < 0$

Obrázek 11: Příklad 7 pro  $\varepsilon \neq 0$



(a)  $\lambda = 0$



(b)  $\lambda < 0$

Obrázek 12: Příklad 8