Vyšetřování absolutní a neabsolutní konvergence řad

20. března 2009

1 Jak řešit typický příklad.

Typický příklad řady, jejíž členy střídají znaménka, je následující řada s parametrem v exponentu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \sin k, \tag{1}$$

1. krok: Konvergence (obyčejná, absolutní konvergenci si necháme na později).

1a) Rozdělíme řadu na oscilující část a část, o které si myslíme, že bude monotónní. Směřujeme k použití Dirichletova kritéria.

V našem případě $a_k = \sin k$, $b_k = (\sin 1/k)^p$.

1b) O oscilující části ukážeme, že má omezené částečné součty.

Pro řadu $a_k = \sin k$ je to známé (dokáže se pomocí Moivrovy věty).

1c) O druhé části zjistíme, pro které hodnoty parametru p platí $\lim b_k = 0$. Pro ostatní hodnoty není splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy diverguje.

V našem případě $\sin 1/k \to 0$, takže $\lim_{k\to\infty} (\sin 1/k)^p = 0$ pro $p > 0$. Pro $p \le 0$ není splněna nutná podmínka a řada tedy diverguje.

1d) O druhé části ukážeme, že je monotónní.

V našem případě: platí $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$, proto $\sin \frac{1}{k} > \sin \frac{1}{k+1}$ (funkce sin je rostoucí na $(0, \pi/2)$ a hodnoty $1/k$ vždy padnou do tohoto intervalu). Pokud $p > 0$ (ostatní p nás už nezajímají), tak $(\sin \frac{1}{k})^p > (\sin \frac{1}{k+1})^p$ (opět proto, že funkce $y \mapsto y^p$ je rostoucí, tentokrát na $(0, +\infty)$). Tím je monotonie dokázána.

1e) Dílčí závěr: Z Dirichletova kritéria plyne, že řada konverguje pro všechna $p > 0$. Pro $p \le 0$ řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka.

2. krok: Absolutní konvergence.

2a) Nejprve ukážeme, že pro některá $p > 0$ řada

$$\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cdot |\sin k| \tag{2}$$

konverguje. Časem uvidíme, že si můžeme dovolit odhadnout sinus jedničkou.

2a-1) Použitím srovnávacího kritéria a faktu, že $|\sin k| \le 1$, máme: Pokud konverguje $\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p$, konverguje také $\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p |\sin k|$.

2a-2) Zbývá vyřešit, pro která p konverguje řada $\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p$, nebo-li jak rychle se její členy blíží k 0. Protože

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = 1, \text{ tj. } \lim_{k\to\infty} \frac{(\sin(1/k))^p}{(1/k)^p} = 1,$$

dostáváme z limitního srovnávacího kritéria: $\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum \frac{1}{k^p}$, tj. právě tehdy, když $p > 1$. Pro $p > 1$ tedy řada (2) konverguje.

2b) Nyní ukážeme, že pro ostatní p (tj. $0 < p \leq 1$) řada (2) diverguje (to z bodu 2a neplyne, protože v bodu 2a-1 platí jen implikace jedním směrem).

2b-1) Pro důkaz divergence potřebujeme odhadnout $|\sin k|$ zdola, použijeme odhad $|\sin k| \geq (\sin k)^2$. Známý vzorec pro $\cos 2k$ dává po úpravě $(\sin k)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2k)$. Máme tedy srovnání

$$\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cdot |\sin k| \geq \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p - \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cos 2k \tag{3}$$

Ukážeme, že řada $\sum \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p - \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cos 2k$ diverguje. Protože je to řada s nezápornými členy, srovnávací kritérium nám řekne, že také řada (2) diverguje.

2b-2) Z bodu 2a-2) víme, že pro $p \leq 1$ řada $\sum \left(\sin \frac{1}{k}\right)^p$ diverguje, limita jejích částečných součtů je tedy $+\infty$ (protože se jedná o řadu s nezápornými členy).

2b-3) Řada $\sum \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cos 2k$ konverguje (pro $0 < p \leq 1$) podle Dirichletova kritéria, neboť 1. $\sum \cos 2k$ má omezené částečné součty (opět známý fakt, případně důkaz pomocí Moivrovy věty) 2. $\lim_{k\to\infty}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p = 0$ podle bodu 1c) a 3. posloupnost $\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p$ je monotónní podle bodu 1d). Limita částečných součtů této řady je nějaké konečné číslo K.

2b-4) Pro $0 < p \leq 1$ řada $\sum \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p - \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{k}\right)^p \cos 2k$ diverguje, protože posloupnost jejích částečných součtů konverguje k $\frac{1}{2} \cdot (+\infty - K) = +\infty$. Tedy i řada (2) diverguje.

2c) Dílčí závěr: Řada (1) je absolutně konvergentní pro $p > 1$, pro $p \leq 1$ není absolutně konvergentní.

3. krok: Závěr: Řada konverguje absolutně pro $p > 1$, neabsolutně pro $0 < p \leq 1$ a diverguje pro $p \leq 0$.

2 Důležité postupy a triky

K bodu 1b) Důkaz omezenosti částečných součtů pomocí Moivrovy věty (nebo komplexní exponenciály) je potřeba umět. Dá se totiž použít i na složitější řady než je $\sum \sin k$.

K bodu 1d) Občas je dobré posloupnost nahradit funkcí, tu zderivovat a tím zjistit monotonii. Pokud je kandidát na monotónní posloupnost ve tvaru součinu $c_k \cdot d_k$, kde $c_k \to 0$ je evidentně klesající a d_k evidentně omezená a rostoucí, lze namísto (někdy složitého) zkoumání monotonie $c_k d_k$ použít nejprve Dirichletovo kritérium na řadu $\sum c_k \sin k$ (zde je monotonie c_k známá) a poté Abelovo kritérium na řadu $\sum d_k \cdot (c_k \sin k)$.

K bodu 2a-2) V tomto bodě lze využít veškeré dovednosti pro počítání limit, např. L'Hospitalovo pravidlo, Taylorovy polynomy, ...

K bodu 2b) Tento bod odpadne, je-li oscilující posloupnost nikoliv $\sin k$, ale $(-1)^k$. V tom případě totiž dostaneme v bodě 2a-1) ekvivalenci.

K bodům 2b-1) až 2b-4) Postup popsaný v těchto bodech je potřeba si zapamatovat, protože se používá velice často.