

Množiny výjimečných bodů funkcí

17. října 2018

Pro funkci $f : R \rightarrow R$ platí následující tvrzení:

1. Množina bodů, kde má f ostré lokální maximum, je (nejvýše) spočetná. Pro každou (nejvýše) spočetnou množinu najdeme funkci, která má ostrá lokální maxima právě v bodech této množiny.
2. Množina bodů nespojitosti funkce f je typu F_σ , tj. spočetné sjednocení uzavřených množin. Pro každou množinu typu F_σ existuje funkce, jejíž množina bodů nespojitosti je rovna této množině.

Nabízejí se další otázky ke zkoumání:

- Jak může vypadat množina bodů, kde má funkce skok?
- Jak může vypadat množina bodů, kde funkce nemá jednostranné limity?
- Jak může vypadat množina bodů, v nichž je funkce monotónní?
- Jak může vypadat množina bodů, množina bodu nespojitosti na nějakem metrickem prostoru?
- Jak může vypadat množina bodů, kde neexistuje derivace?
- Jak může vypadat množina bodů, ve kterých neexistují ani jednostranné derivace?
- Jak může vypadat množina bodů, ve kterých je horní a dolní derivace konečná?
- Jak může vypadat množina bodů, ve kterých existuje n -tá derivace, ale neexistuje $(n+1)$ -ní?

Cílem práce je najít nutné, resp. postačující, resp. nutné a postačující podmínky pro některé z výše uvedených množin a zkonstruovat funkce, pro něž množina bodů s danou vlastností má nějaký speciální tvar. **Nejedná se o kompilační práci, práce je určena pro přemýšlivé studenty.**

Literatura:

- [1] J. Lukeš a kol.: Problémy z matematické analýzy, Univerzita Karlova v Praze, 1982
- [2] Kechris, Alexander S.: Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995.