3. a 7.10.2003

Míra a integrál: cvičení 1

1. Vyšetřete konvergenci následujících Lebesgueových integrálů:

(a) $\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^\infty x\sin x^3\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující integrály:

(a) $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^\infty x^{s-1}(\log x)^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int_0^{\pi/2}(\operatorname{tg} x)^a\,\mathrm{d}x$ (f) $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^\pi \frac{1-\cos ax}{x^p}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int_0^\pi \log\sin ax\,\mathrm{d}x$ (i) $\int_0^1 x^{ax}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ (k) $\int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ (l) $\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x}\,\mathrm{d}x$

(m) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,\mathrm{d}x$ (n) $\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

10. a 17.10.2003

Míra a integrál: cvičení 2

1. Pomocí Leviho věty spočtěte následující limity:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^\infty nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$

2. (a) Buďte $f_n : [0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=0$ pro $x\in[0,n)$, $f_n(x)=-1$ jinak. Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Buďte $g_n : [0,1]\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=n$ pro $x\in[0,1/n)$, $g_n(x)=0$ jinak. Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Vypočtěte:

(a) $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_0^1 \frac{a^{x^2}+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\lim\limits_{a\to 1^-}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\log(a-\sin x)}\,\mathrm{d}x$

4. Ukažte, že:

(a) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\pi^2/6$ (b) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \pi^2/6$

(c) $\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x = 1$ (d) $\int_0^1 \frac{\log(1/x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \pi^2/8$

(e) $\int_0^1 \frac{x^2 \log(1/x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \pi^2/8 - 1$ (f) $\int_0^1 \log x \log(1-x)\ \mathrm{d}x = 2 - \pi^2/6$

17. a 21.10.2003

Míra a integrál: cvičení 3

1. Řešte úlohy z minulé série pomocí Lebesguovy věty.

2. Pomocí Lebesgueovy věty vypočtěte následující limity:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\ \mathrm{d}x$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\ \mathrm{d}x$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\ \mathrm{d}x$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} nxe^{-nx^2}\ \mathrm{d}x$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\ \mathrm{d}x$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{-nx^2}\ \mathrm{d}x$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x/n)^n\ \sqrt[n]{x}}\ \mathrm{d}x$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\ \mathrm{d}x$

3. Pomocí Lebesgueovy věty vypočtěte následující limity:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$ (b) $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\ \mathrm{d}x$

4. Ukažte, že

(a) $\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3}\log(1/x)\ \mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{27}$ (b) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

(c) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3}\log(1/x)\ \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{27}$ (d) $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1-x)\log(1/x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

(e) $\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$ (d) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{ax}+1}\ \mathrm{d}x = \frac{\log 2}{a}$, $a > 0$

31.10. a 4.11.2003

Míra a integrál: cvičení 4

1. Ukažte, že následující funkce jsou spojité na daných intervalech:

(a) $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$, $[0,\infty)$ (b) $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\ \mathrm{d}x$, $(0,\infty)$

(c) $F(a) = \int_{-1}^1 \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$, $\mathbb{R}$ (d) $F(a) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\ \mathrm{d}x$, $(0,\infty)$

(e) $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\ \mathrm{d}x$, $(0,\infty)$ (f) $F(a) = \int_0^2 x^2\cos ax\ \mathrm{d}x$, $\mathbb{R}$

(g) $F(a) = \int_0^1 \operatorname{arctg}(x/a)\ \mathrm{d}x$, $(0,\infty)$ (h) $F(a) = \int_7^\infty x^a$, $(-\infty,-1)$

(i) $F(a) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^a}\ \mathrm{d}x$, $(2,\infty)$ (j) $F(a) = \int_{1/2}^\infty \frac{\cos x}{x^a}\ \mathrm{d}x$, $(1,\infty)$

2. Vyšetřete spojitost a diferencovatelnost následujících funkcí a vypočtěte derivaci:

(a) $F(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x$
(b) $F(a) = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$
(c) $F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$
(d) $F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+ax^2}\ \mathrm{d}x$
(e) $F(a) = \int_0^\infty \frac{x}{e^{-ax}-1}\ \mathrm{d}x$
(f) $F(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\sin x)}{x}\ \mathrm{d}x$
(g) $F(a) = \int_0^1 \frac{1-x^a}{\log x}\ \mathrm{d}x$
(h) $F(a) = \int_0^1 \frac{\arcsin ax}{x}\ \mathrm{d}x$
(i) $F(a) = \int_0^\pi \operatorname{tg} ax\ \mathrm{d}x$

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů platí:

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \log(1+|a|)$
(b) $\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\log x}\ \mathrm{d}x = \log(\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)})$
(c) $\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{a}{k}$
(d) $\int_0^\infty \frac{\log(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{|b|}\log(|a|+|b|)$
(e) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{-ax}-1}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6a^2}$
(f) $\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\ \mathrm{d}x = \pi \arcsin a$
(g) $\int_0^1 \frac{1-x^a}{\log x}\ \mathrm{d}x = \log\frac{1}{a+1}$
(h) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(a+1)$
(i) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin kx\ \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{b}{k} - \operatorname{arctg}\frac{a}{k}$

14. a 18.11.2003

Míra a integrál: cvičení 5

1. Vypočtěte dvourozměrnou Lebesgueovu míru následujících množin:

(a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 6\}$; $\lambda_2(M) = 6\pi$
(b) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < y\}$; $\lambda_2(M) = +\infty$
(c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 5,\ y \le 3; xy \ge 1\}$; $\lambda_2(M) = 12 - \log 5$
(d) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$; $\lambda_2(M) = 3\pi$
(e) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x+2\}$; $\lambda_2(M) = \frac{9}{2}$

2. Najděte dvourozměrnou Lebesgueovu míru množiny M omezené danými křivkami:

(a) $y = \frac{8}{4+x^2}$, $y = \frac{x^2}{4}$; $\lambda_2(M) = 2(\pi - \frac{2}{3})$
(b) $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$, $x = 0$; $\lambda_2(M) = \frac{3}{2} - \log 2$

(c) $2x-y=0$, $2x-y-7=0$, $x-4y+7=0$, $x-4y+14=0$; $\lambda_2(M)=7$
(d) $x=\frac{x^2+b^2}{2b}$, $x=\frac{x^2+a^2}{2a}$ $(0<b<a)$; $\lambda_2(M)=\frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab}$

3. Vypočtěte následující Lebesgueovy integrály:
(a) $\iint_M (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{2}{3}$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$
(b) $\iint_M e^{-(x+y)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y\}$
(c) $\iint_M xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{280}$, M omezená osami a křivkou $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$
(d) $\iint_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2\pi$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$
(e) $\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le x\}$
(f) $\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{\pi}{12}$, $M=[0,1]\times[0,1]$

4. Vypočtěte trojrozměrnou Lebesgueovu míru množiny M:
(a) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le 1-x-y\}$; $\lambda_3(M)=\frac{1}{6}$
(b) M omezená plochami $z=1$, $z^2=x^2+y^2$; $\lambda_3(M)=\frac{\pi}{3}$
(c) M omezená $z=a^2-x^2$, $x+y=a$, $y=0$, $z=0$, $y=2x$; $\lambda_3(M)=\frac{41}{162}a^4$

21. a 25.11.2003

Míra a integrál: cvičení 6

1. Vypočtěte objem koule pomocí
(a) sférických souřadnic (b) válcových souřadnic.

2. Vypočtěte dvojrozměrné Lebesgueovy míry následujících množin:
(a) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2)\}$, $\lambda_2(M)=2a^2$
(b) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^3< 2a^2(x^4+y^4)\}$, $\lambda_2(M)=\frac{3}{4}\pi a^2$
(c) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x+y)^4< ax^2y,\ x>0\}$, $\lambda_2(M)=\frac{a^2}{210}$
(d) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x+y)^4< ax^2y,\ x<0\}$, $\lambda_2(M)=+\infty$
(e) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\le x^2\le 4y,\ 2x\le y^2\le 3x\}$, $\lambda_2(M)=1$
(f) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 2<x+y<3,\ x<y<3x\}$, $\lambda_2(M)=\frac{5}{8}$
(g) $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a<xy<b,\ py<x<qy\}$, $\lambda_2(M)=\frac{1}{2}(b-a)\log\frac{q}{p}$.

3. Vypočtěte dvojrozměrné Lebesgueovy míry množin omezených následujícími křivkami:
(a) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$, $a,b,c>0$; $\lambda_2(M)=\frac{a^2b^2}{2c^2}$
(b) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$; $\lambda_2(M)=\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$

(c) $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$; $\lambda_2(M)=\frac{3}{4}\pi a^2$

(d) $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2-2Ry=0$, $x=0$; $\lambda_2(M)=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Vypočtěte objemy následujících těles:

(a) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 2az,\ x^2+y^2\le z^2\}$; $\lambda_3(M)=\pi a^3$

(b) M omezená $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$; $\lambda_3(M)=\frac{4}{3}\pi(R^3-(R^2-r^2)^{3/2})$

(c) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^3z,\ x\le 0, y\le 0, z\le 0\}$; $\lambda_3(M)=\frac{1}{6}\pi a^3$

(d) M omezená $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $y=0$, $y=x$; $\lambda_3(M)=\frac{21\sqrt{2}\pi}{4}$

(e) M omezená $c(x^2+y^2)+a^z=a^2c$, $z=0$; $\lambda_3(M)=\frac{1}{2}\pi a^2c$

(f) M omezená $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2+z^2=12$; $\lambda_3(M)=\frac{8}{3}\pi(6\sqrt{3}-5)$

(g) M omezená $x^2+y^2=a^2$, $y^2=pz$, $z=0$; $\lambda_3(M)=\frac{\pi a^4}{4p}$

28.11. a 2.12.2003

Míra a integrál: cvičení 7

1. Dokažte následující tvrzení:

(a) Pro $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2\le\frac{x^2y}{c^3},\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ je

$\iint_M xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{840}\frac{a^1 0b^6}{c^1 2}$

(b) Pro $M\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ je

$\iint_M\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{4}{27}$

(c) Pro M omezenou křivkou $(x^2+y^2/3)^2=x^2y$ je

$\iint_M\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2/3}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2$

2. Dokažte následující tvrzení:

(a) Pro $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$ je

$\iiint_M\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi abc$

(b) Pro $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 3a^2,\ x^2+y^2\le 2az\}$ je

$\iiint_M(x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})$

(c) Pro $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 3a^2,\ x^2+y^2\le 2az\}$ je

$\iiint_M(x+y+z)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})$

(d) Pro $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z^2+y^2\le x^2,\ x\ge 0\}$ je

$\iiint_M(x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$

5. 12. 2003

Písemka

1. (10 bodů) Vypočtěte následující integrál, víte-li, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} \, \mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů) Vypočtěte derivaci funkce

$$F(k) := \int_0^{\infty} \frac{x^k (x-1)}{\log x} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

v bodě $k = 1$.

3. (10 bodů) Vypočtěte objem průniku tří válců s poloměrem podstav rovným jedné, jejichž osy jsou po řadě souřadnicové osy x, y, z.

9. 12. 2003

Písemka

1. (10 bodů) Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-nx^n} \mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů) Vypočtěte následující integrál s parametrem $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - 1}{x^2} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

3. (10 bodů) Vypočtěte objem anuloidu

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \le \rho^2\}, \quad R > \rho > 0.$$

19.12.2003 a 6.1.2004

Míra a integrál: cvičení 8

1. Najděte integrovatelnou majorantu k posloupnosti funkcí:
(a) $n^2x(1-x)^n$, $x \in (0,1)$ (b) $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k^p x}$, $x \in (0,1)$.

2. Najděte integrovatelnou majorantu $g(x) \geq |f(a,x)|$ na daných intervalech:
(a) $f(a,x) := \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}$, $x \in (0,1)$ (b) $f(a,x) := \frac{\sin(1/x)}{x(x+a)^2}$, $x \in (1,+\infty)$
(c) $f(a,x) := \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)}$, $x \in (0,\pi)$ (d) $f(a,x) := \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (0,1)$
(e) $f(a,x) := \frac{1}{|\log x|^a}$, $x \in (1,2)$ (f) $f(a,x) := \log(x^2+a^2)$, $x \in (0,1)$

3. Najděte integrovatelnou majorantu k $\frac{\partial f}{\partial a}$ na daných intervalech:
(a) $f(a,x) := x^a$, $x \in (0,1)$ (b) $f(a,x) := \frac{1}{a+x^2}$, $x \in (-\infty,+\infty)$
(c) $f(a,x) := e^{-ax^2}$, $x \in (-\infty,+\infty)$ (d) $f(a,x) := \cos ax$, $x \in I$
(e) $f(a,x) := x^{s-1}e^{-x}$, $x \in (0,+\infty)$ (f) $f(a,x) := \log(1+p\sin^2 x)$, $x \in (0,\pi/2)$
(g) $f(a,x) := \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)$, $x \in (0,\pi/2)$

4. Vypočtěte objemy následujících těles:
(a) Kulová vrstva $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $1/4 < z < 3/4$.
(b) Anuloid $(2-\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 < 1$.
(c) Sjednocení předchozího anuloidu a válce $x^2+y^2 < 4$.
(d) Průniku tří válců $x^2+y^2<1$, $x^2+z^2<1$, $y^2+z^2<1$.
(e) Sjednocení válce $x^2+y^2<1/4$, $|z|<1$ a koule $x^2+y^2+z^2<1$.
(f) Průniku tří koulí o poloměru 2 a středech $[1,0,0]$, $[-1,0,0]$, $[0,1,0]$.

6. a 9.1.2004

Míra a integrál: cvičení 9

1. Vypočtěte délky následujících křivek:
(a) půlka kružnice $(x,\sqrt{1-x^2})$, $x \in (-1,1)$,
(b) elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
(c) $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^2$ mezi body $[0,0,0]$ a $[3,3,2]$,
(d) $r = a\sin^2(\phi/3)$, $\phi \in [0,3\pi]$; $a>0$,
(e) $\sqrt{x^2+y^2} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

2. Vypočtěte následující křivkové integrály:
(a) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde C je kružnice $(x-1/2)^2+y^2=1/4$,
(b) $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, kde $C=\{[a\cos t, a\sin t, bt], t\in[0,4\pi]\}$,
(c) $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, kde C je dána rovnicí $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,

3. Vypočtěte obsahy následujících ploch:
(a) sféra $x^2+y^2+z^2=1$,
(b) povrch elipsoidu $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$,
(c) $z=ax+by$, $x^2+y^2\le 1$,
(d) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $x^2+y^2\le 1$,
(e) povrch anuloidu $(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=\rho^2$, $R>\rho$,

4. Vypočtěte následující plošné integrály:
(a) $\int_M z\,\mathrm{d}S$, $M=\{[t\cos s, t\sin s, s], t\in[0,a], s\in[0,2\pi]\}$,
(b) $\int_M x\,\mathrm{d}S$, $M=\{[x,y,z], x^2+y^2=z, z\in[0,1]\}$,