Písemná zkouška z ODR
4.1.2017, Termín A

1. Uvažujte soustavu $x' = Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Najděte dimenze prostorů X_+, X_- a X_0 a rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy.

(b) Najděte všechny počáteční podmínky $x(0)$, pro něž je řešení x soustavy omezené na $[0, +\infty)$.

(c) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy $x' = Ax - 3x + x^T Axv$, kde $v = (1, 1, 1)^T$.

2. Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešicí funkce soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(y+1) + \lambda t y^2, \qquad & x(0) &= 0 \\ y' &= (x+1)(y-1), \qquad & y(0) &= \mu \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 1, 0)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 1, 0)$.

(c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(2, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého o.

3. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = \sin(tx)$$

(a) Určete, ve kterých oblastech roviny (t, x) jsou řešení rostoucí/klesající. Načrtněte tyto oblasti.

(b) Načrtněte řešení rovnice do roviny (t, x) (do zvláštního obrázku).

(c) Je každé maximální řešení definováno na celém R? Svou odpověď dokažte.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR
2.3.2015, Termín B

1. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= 2y + xy^2 + x^3 \\ y' &= -2x + y^3 \end{aligned}$$

(a) Vyšetřete stabilitu linearizované soustavy $\binom{x}{y}' = \nabla F(0,0)\binom{x}{y}$. Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení pro nelineární soustavu?

(b) Převeďte nelineární soustavu do polárních souřadnic.

(c) Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení na základě (b)?

2. Mějme matici $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ splňující $A^2 = -2I$.

(a) Vypočtěte e^{tA} přímo z definice maticové exponenciály.

(b) Stejnou metodou vypočtěte e^{tB} pro $B = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.

(c) Rozhodněte o stabilitě/asymptotické stabilitě nulového řešení rovnice $x' = Ax$.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Znázorněte do roviny (x, y) trajektorie řešení (včetně stacionárních bodů a směru probíhání).

(c) Z rovnice pro x' a s pomocí (b) rozhodněte, pro jaké počáteční podmínky $(x(0), y(0))$ nastane blow-up pro čas běžící dopředu.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR
30.1.2015, Termín C

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= y + 2 + x(y+2) \\ y' &= -x - x(y+2) + x^3 \end{aligned}$$

(a) Najděte stacionární body soustavy.

(b) Najděte linearizované soustavy ve stacionárních bodech.

(c) Rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů pro **linearizované soustavy**. Co dokážete říct o stabilitě stacionárních bodů původní nelineární soustavy?

2. Buď $\phi(t, \lambda, \mu)$ řešicí funkce rovnice

$$x' = t(x^2 + 2x - 3) + \lambda t \sin x, \qquad x(1) = \mu$$

s parametrem $\lambda \in \mathrm{R}$.

(a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 0, -3)$.

(b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0, -3)$.

(c) Najděte $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}(t, 0, -3)$.

3. Uvažujte soustavu pro $y > 0$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Vypočtěte řešení soustavy.

(c) Je nulové řešení stabilní?

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR
9.2.2015, Termín D

1. OLD Mějme diferenciální rovnici s parametrem $a \geq 0$

$$x'' + ax' + x^2(x^2 + x) = 0$$

(a) Najděte ljapunovskou funkci.

(b) Rozhodněte o stabilitě, resp. asymptotické stabilitě řešení v závislosti na a.

(c) Pro $a = 0$ vypočtěte periodu periodického řešení s počáteční podmínkou $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2. Nechť pro matici A platí

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2 - e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Najděte řešení rovnice $x' = Ax$ s počáteční podmínkou $x(0) = (1, 2)^T$. Jak se chová pro $t \to +\infty$?

(b) Je nulové řešení rovnice $x' = Ax$ asymptoticky stabilní/stabilní/nestabilní?

(c) Najděte stabilní podprostor pro rovnici $x' = Ax$.

3. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = x(2\sqrt{x} + t)$$

(a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci a načrtněte průběhy řešení.

(b) Vyznačte v rovině oblasti, kde jsou řešení rovnice konvexní a konkávní.

(c) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda nastane blow-up pro čas běžící dopředu.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.