

Písemná zkouška z ODR 19.1.2015, Termín B

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2y - 2x \sin^2 y \\y' &= -5x + ay \cos x\end{aligned}$$

- (a) Vyšetřete stabilitu (asymptotickou stabilitu) pro $a > 0$.
- (b) Vyšetřete stabilitu (asymptotickou stabilitu) pro $a < 0$.
- (c) Pro $a = 0$ najděte Ljapunovskou funkci. Co s její pomocí dokážete říct o stabilitě (asymptotické stabilitě)?

2. Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned}x' &= x \cos y + y \sin x, & x(0) &= \mu \\y' &= y + x, & y(0) &= \lambda\end{aligned}$$

- (a) Vypočtete $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 0, 0)$.
- (b) Vypočtete $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 0, 0)$.
- (c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(10, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého o .

3. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = tx^3 + xt^3$$

- (a) Načrtněte řešení rovnice. Ve kterých oblastech roviny (t, x) je rostoucí/ klesající/ konvexní/ konkávní?
- (b) Buď \tilde{x} řešení rovnice s počáteční podmínkou $x(0) = 1$. Dokažte, že pro všechna kladná t platí $\tilde{x}' > t\tilde{x}^3$.
- (c) S pomocí odhadu v (b) a Barrowova vzorce ukažte blow-up řešení \tilde{x} a odhadněte shora čas, kdy k němu dojde.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR
30.1.2015, Termín C

1. Uvažujte soustavu $x' = Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Najděte dimenze prostorů X_+ , X_- a X_0 a rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy.
- (b) Najděte prostory X_+ , X_- a X_0 .
- (c) Vypočtěte e^{tA} .

2. Mějme diferenciální rovnici

$$x'' + a(x' + x) + x^2(x' + x) = 0$$

- (a) Převed'te na soustavu rovnic prvního řádu a najděte stacionární řešení.
- (b) Vyšetřete stabilitu stacionárních řešení pro $a = 4$.
- (c) Dokažte stabilitu stacionárního řešení pro $a = 0$ (pomocí l'apunovské funkce).

3. Uvažujte soustavu pro $x > 0$

$$\begin{aligned} x' &= 2xy \\ y' &= 2y(x + y) \end{aligned}$$

- (a) Vypoč'te první integrál.
- (b) Načrtněte do roviny (x, y) řešení procházející bodem $[1, 2]$ (monotonie a konvexita trajektorie, limity v krajních bodech trajektorie).
- (c) Pomocí (a) zredukujte soustavu na jednu rovnici prvního řádu a rozhodněte, zda nastane blow-up řešení procházejícího bodem $[1, 2]$.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písenná zkouška z ODR
9.2.2015, Termín D

1. Buď $\phi(t, \lambda, \mu)$ řešící funkce rovnice

$$x' = \frac{2}{t}(x - 1) + (x - 1)^2 + \lambda x^2, \quad x(2) = \mu$$

s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 0, 1)$.
- (b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0, 1)$.
- (c) Najděte $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}(t, 0, 1)$.

2. Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňující $A^2 = -A$.

- (a) Vypočtěte e^{tA} . Přesněji, najděte matice B a $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že platí $e^{tA} = B + Ce^{-t}$.
- (b) S pomocí (a) rozhodněte o stabilitě nulového řešení $x' = Ax$.
- (c) Najděte vlastní čísla matice A a s jejich pomocí rozhodněte o stabilitě nulového řešení rovnice $x' = Ax$.

3. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = (x - 1)(x^3 + t)$$

- (a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci.
- (b) Najděte stacionární řešení a rozhodněte, zda se na něj nějaké řešení napojuje (zdůvodněte).
- (c) Rozhodněte (a zdůvodněte), kolikrát protnou jednotlivá řešení křivky s nulovou derivací a načrtněte grafy řešení.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písenná zkouška z ODR
2.3.2015, Termín E

1. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= xy^2 + x(x^2 + y^2)^2 \\y' &= -x^2y + x(x^2 + y^2)^2.\end{aligned}$$

- (a) Vyšetřete stabilitu linearizované soustavy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \nabla F(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení pro nelineární soustavu?
- (b) Převed'te nelineární soustavu do polárních souřadnic.
- (c) Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení na základě (b)?

2. Uvažujte matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^t & 0 & 2e^{-t} - 2e^t \\ -3e^{-t} + 3e^t & e^t & -3e^{-t} + 3e^t \\ -e^{-t} + e^t & 0 & -e^{-t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

- (a) Vypoč'tete A^2 a pomocí výsledku uka'žte, že $e^{tA} = B(t)$ (nápowěda: jaký je Taylorův rozvoj funkce $e^t + e^{-t}$?).
- (b) Najděte řešení rovnice $x' = Ax$ s počáteční podmínkou $x(0) = (a, b, c)^T$.
- (c) Pomocí (b) najděte stabilní podprostor rovnice $x' = Ax$.

3. Na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= xy \\y' &= \frac{xy^2}{x+1}.\end{aligned}$$

- (a) Vypoč'tete první integrál a znázorněte do roviny (x, y) trajektorie řešení.
- (b) Najděte řešení soustavy pro počáteční podmínku $x(0) = 1, y(0) = k$.
- (c) Na základě (b) rozhodněte, zda dochází k blow-upu.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.