

Písemná zkouška z ODR II
21.1.2014, Termín A

1. Uvažujte systém

$$\begin{aligned}x' &= 2x^2y - y^2, \\y' &= -2y - 3x^2y - x^5.\end{aligned}$$

(a) Najděte vhodnou aproximaci centrální variety, která umožní vyšetřit stabilitu počátku. **(6 bodů)**

(b) Rozhodněte o stabilitě či nestabilitě počátku (podrobně zdůvodněte). **(4 body)**

2. Uvažujte systém

$$\begin{aligned}x' &= y + xy^2(1 - x^2 - 2y^4), \\y' &= -x + y(1 - x^2 - 2y^4).\end{aligned}$$

(a) Ukažte, že počátek je jediným stacionárním bodem. **(3 body)**

(b) Ukažte, že existuje periodické řešení tohoto systému. **(7 bodů)**

Návod: V obou částech zkoumejte vzdálenost řešení od počátku.

3. Uvažujte systém s regulací u a parametry $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2y + z + u, \\y' &= -y + pz - u, \\z' &= x - y - 4z\end{aligned}$$

a množiny přípustných regulací $U_1 = L^1([0, +\infty))$, $U_2 = L^1([0, +\infty), [-1, 1])$.

(a) Najděte obor regulovatelnosti v závislosti na p pro U_1 . **(5 bodů)**

(b) Ukažte globální regulovatelnost pro U_2 a $p = 0$. **(5 bodů)**

Písemná zkouška z ODR II
3.2.2014, Termín B

1. Uvažujte systém s regulací u

$$\begin{aligned}x' &= x + 2 \sin y + 3z + 3z \sin z + u, \\y' &= -e^x y + 2z + u^2, \\z' &= x + \sin y - u\end{aligned}$$

a množinu přípustných regulací $U = \{u : [0, +\infty) \rightarrow [-5, 5], u \text{ měřitelná}\}$.

(a) Ukažte, že systém je lokálně regulovatelný. **(6 bodů)**

(b) Ukažte, že systém není regulovatelný pro velká $x(0), z(0)$. **(4 body)**

2. Uvažujte systém s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x' &= \mu \sin x + y \cos y + x^3, \\y' &= \mu \sin y - x \cos x.\end{aligned}$$

(a) Ukažte, že systém má periodická řešení pro $\mu \in (0, \varepsilon)$ nebo $(-\varepsilon, 0)$. **(5 bodů)**

(b) Určete stabilitu periodického řešení a rozhodněte, zda existuje pro $\mu > 0$ nebo $\mu < 0$. **(5 bodů)**

Ověřte předpoklady používaných vět. Náповěda: $16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$.

3. Uvažujte systém

$$\begin{aligned}x' &= \sin y - x \sin^2 y, \\y' &= -x.\end{aligned}$$

(a) Najděte asymptoticky stabilní stacionární body. Zdůvodněte. **(6 bodů)**

(b) Najděte nestabilní stacionární body. Zdůvodněte. **(4 body)**

Návod: Zkoumejte chování funkce $V(x, y) = x^2 - 2 \cos y$ podél řešení.

Písemná zkouška z ODR II
10.2.2014, Termín C

1. Uvažujte systém s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + y^2 + \mu, \\y' &= 2x - 2y.\end{aligned}$$

- (a) Najděte bod (x_0, y_0, μ_0) , na jehož okolí dochází k bifurkaci. **(3 body)**
(b) Určete typ bifurkace. Popište chování systému (počet a stabilitu stacionárních bodů) na okolí bodu (x_0, y_0) pro $\mu = \mu_0 + \varepsilon$ a pro $\mu = \mu_0 - \varepsilon$. **(7 bodů)**

2. Uvažujme rovnici s regulací $x' = 2x - 2u$ (DR), počáteční podmínku $x(0) = 3$ (PP) a funkcionál

$$F(u) := \int_0^2 x(t) + u(t) + u^2(t) dt$$

a množinu přípustných regulací $U := \{u : [0, 2] \rightarrow [-2, 2]; u \text{ měřitelná}\}$.

- (a) Najděte regulaci $u \in U$, pro kterou je $F(u)$ maximální. **(5 bodů)**
(b) Najděte x příslušné k tomuto u . **(5 bodů)**

3. Uvažujte systém

$$\begin{aligned}x' &= y + xy^2 + xz^2, \\y' &= -x - x^2y + yz^2, \\z' &= -z + z^2 - xy.\end{aligned}$$

- (a) Najděte stabilní a centrální podprostor linearizovaného problému na okolí počátku. **(3 body)**
(b) Aproximujte centrální varietu co nejlépe polynomem druhého řádu a napište odhad chyby ve tvaru $O(\dots)$. **(7 bodů)**

Písemná zkouška z ODR II
10.9.2014, Termín D

1. Uvažujte systém s regulací u

$$\begin{aligned}x' &= \sin(x + y + z + u) + (x + y)^2, \\y' &= e^{x+u}(y + z), \\z' &= x + y + 2z + u\end{aligned}$$

a množinu přípustných regulací $U = \{u : [0, +\infty) \rightarrow [-5, 5], u \text{ měřitelná}\}$.

- (a) Ukažte, že systém je lokálně regulovatelný. **(6 bodů)**
(b) Ukažte, že systém není regulovatelný pro velká $x(0), y(0), z(0)$. **(4 body)**

2. Uvažujte systém

$$\begin{aligned}x' &= -x + 3yz, \\y' &= -2z + xyz, \\z' &= 2y - 3x^2y.\end{aligned}$$

- (a) Najděte stabilní a centrální podprostor linearizovaného problému na okolí počátku. **(3 body)**
(b) Aproximujte centrální varietu co nejlépe polynomem druhého řádu a napište odhad chyby ve tvaru $O(\dots)$. **(7 bodů)**

3. Uvažujte systém s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x' &= \sin(xy) + y + \mu \sin x, \\y' &= (1 - \cos x)y - x + \mu y.\end{aligned}$$

- (a) Ukažte, že systém má periodická řešení pro $\mu \in (0, \varepsilon)$ nebo $(-\varepsilon, 0)$. **(5 bodů)**
(b) Určete stabilitu periodického řešení a rozhodněte, zda existuje pro $\mu > 0$ nebo $\mu < 0$. **(5 bodů)**

Ověřte předpoklady používaných vět. Náповěda: $16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$.