Obyčejné diferenciální rovnice 2
15.1.2018, Termín A

1. Uvažujme množinu přípustných regulací $\bigcup_{T>0} L^\infty(0,T)$ a systém s regulací

$$\begin{aligned} x' &= x(xy-1), \\ y' &= x + \sin u. \end{aligned}$$

(a) Linearizujte systém v okolí počátku a najděte obor regulovatelnosti pro tento lineární systém. **(5 bodů)**
(b) Najděte obor regulovatelnosti pro původní nelineární systém. **(5 bodů)**

2. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 + 4y^3 - 6xy^2, \\ y' &= -x - y^3 + 4x^3. \end{aligned}$$

(a) Které úsečky ležící na přímce $x - y = 0$ jsou transverzály? Ukažte, že počátek není globální atraktor. **(5 bodů)**
(b) Pomocí LaSalleho principu ukažte, že počátek je lokální atraktor (zkoumejte vzdálenost od počátku, využije (a)). **(5 bodů)**

3. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= xy, \\ y' &= -x - y. \end{aligned}$$

(a) Linearizujte problém v počátku a najděte stabilní a centrální podprostor tohoto lineárního problému. Pomocí lineární transformace převeďtte systém do tvaru vhodného pro použití vět o centrální varietě. **(5 bodů)**
(b) Aproximujte centrální varietu a rozhodněte o stabilitě počátku. **(5 bodů)**
Nápověda: Transformací získáme systém $z' = z(w-z)$, $w' = -w + z(w-z)$.

Obyčejné diferenciální rovnice 2
22.1.2018, Termín B

1. Uvažujte rovnici s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$x' = x^2 + \mu x + 1,$$

(a) Najděte **všechny** body (μ, x), v nichž dochází k bifurkaci. **(4 body)**
(b) Načrtněte bifurkační diagram, vyšetřete stabilitu stacionárních bodů pro různé hodnoty μ a určete typ bifurkace. **(6 bodů)**

2. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= z^2 - \sin x, \\ y' &= 3xz - y, \\ z' &= \sin(xy) - 2x^2 z. \end{aligned}$$

(a) Aproximujte centrální varietu na okolí počátku s přesností $O(r^6)$ (kde r je x, y nebo z). **(7 bodů)**
(b) Napište redukovanou rovnici a rozhodněte o stabilitě počátku. **(3 body)**

3. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= (x^4 + y^2 + 1)(3y - x^3), \\ y' &= (x^4 + y^2 + 1)(-x - y^3). \end{aligned}$$

(a) Ukažte (pomocí vhodné dulacovské funkce), že systém nemá periodická řešení. **(4 body)**
(b) Ukažte, že každá dopředná orbita je relativně kompaktní (zkoumejte vzdálenost od počátku). **(6 bodů)**

Obyčejné diferenciální rovnice 2
5.2.2018, Termín C

1. Uvažujte systém s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x' &= xy - \mu, \\ y' &= x + y - 2\mu. \end{aligned}$$

(a) Najděte dva body bifurkace (x_0, y_0, μ_0), (x_1, y_1, μ_1), $\mu_0 < \mu_1$. **(5 bodů)**
(b) Vypočtěte dimenzi stabilní, nestabilní a centrální variety stacionárních bodů pro $\mu = -1$. **(5 bodů)**

2. Uvažujme rovnici s regulací $x' = x - u$, počáteční podmínku $x(0) = 10$, funkcionál

$$F(u) := \int_0^2 u(t)x(t) + \operatorname{arctg}(x(t))\, dt$$

a množinu přípustných regulací $U := \{u : [0,2] \to [0,1];\ u \text{ měřitelná}\}$.
(a) Najděte u^* (z Pontrjaginových nutných podmínek pro maximizér funkcionálu F) v závislosti na x a P a ukažte, že trajektorie x příslušná k u^* splňuje $x(2) \geq 10$. **(4 body)**
(b) Najděte u^* splňující Pontrjaginovy nutné podmínky (využijte odhadu z (a) a odhadněte P). **(6 bodů)**

3. Pro $a \in (0,1)$ uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= y + x(a - x^2), \\ y' &= -x + y(a - y^2). \end{aligned}$$

(a) Ukažte, že všechny dopředné orbity jsou relativně kompaktní. (Zkoumejte vzdálenost od počátku) **(6 bodů)**
(b) Pomocí (a) ukažte, že systém má periodické řešení (přijměme bez důkazu, že počátek je jediný stacionární bod). **(4 body)**

Obyčejné diferenciální rovnice 2
12.2.2014, Termín D

1. Uvažujme množinu přípustných regulací $\bigcup_{T>0} L^\infty(0,T)$ a systém s regulací

$$\begin{aligned} x' &= 3x^2 + y, \\ y' &= 2xy + u^2 + u. \end{aligned}$$

(a) Ukažte pomocí Kálmanovy matice, že tento systém je lokálně regulovatelný. **(5 bodů)**
(b) Ukažte (přímo), že systém není globálně regulovatelný. **(5 bodů)**

2. Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= -2z + 3xy + xz, \\ y' &= -2y - xz, \\ z' &= 2x - 3y^2 z. \end{aligned}$$

(a) Najděte stabilní a centrální podprostor linearizovaného problému na okolí počátku. **(4 body)**
(b) Aproximujte centrální varietu co nejlépe polynomem druhého řádu a napište odhad chyby ve tvaru $O(\dots)$. **(6 bodů)**

3. Uvažujte systém s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x' &= e^{xy} - 1 - 2\sin y + \mu x, \\ y' &= \ln(x^2 y + 1) + 2x + \mu y(x+1). \end{aligned}$$

(a) Ukažte, že bodem $(a, 0)$ prochází při vhodné volbě μ periodické řešení (pro dostatečně malá $a > 0$). **(4 body)**
(b) Určete stabilitu periodického řešení a rozhodněte, zda existuje pro $\mu > 0$ nebo $\mu < 0$. **(6 bodů)**
Ověřte předpoklady používaných vět. Nápověda: ověřte, že $a = \frac{1}{8}$ při $16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$.