Domácí úkol č. 3
Multiplikativní a samoadjungované semigrupy na škále prostorů

termín odevzdání: pondělí 16.4.

Buď $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ otevřená a $m : \Omega \to (a, +\infty)$, $a > 0$ měřitelná a

$$D(A) := \{f : \Omega \to \mathrm{C} \text{ měřitelná} : \; m \cdot f \in L^2(\Omega)\}, \qquad Af := m \cdot f$$

multiplikativní operátor. Pro libovolné $\alpha \in \mathrm{R}$ definujme dále

$$D_\alpha := D(A^\alpha) := \{f : \Omega \to \mathrm{C} \text{ měřitelná} : \; m^\alpha \cdot f \in L^2(\Omega)\}, \qquad A^\alpha f := m^\alpha \cdot f$$

a

$$D(A_\alpha) := D_\alpha, \qquad A_\alpha f := m \cdot f.$$

Rozmyslete si, že D_α s normou $\|f\|_{D_\alpha} := \|A^\alpha f\|_2$ je Hilbertův prostor ($D_0 = L^2(\Omega)$).

1. Ukažte, že pro $\beta > \alpha$ je $D_\beta \subset D_\alpha$, $A_\beta = A_\alpha|_{D_\beta}$.

2. Ukažte, že pro každé $\alpha \in \mathrm{R}$ generuje operátor $(-A_\alpha, D_\alpha)$ C_0-semigrupu na $D_{\alpha-1}$. Označíme-li tyto semigrupy T_α, pak pro $\beta > \alpha$ platí $T_\beta = T_\alpha|_{D_{\beta-1}}$.
Vzhledem k těmto faktům můžeme dále vynechat index α u T_α a A_α.

3. Ukažte, že pro všechna $t > 0$, $\alpha \in \mathrm{R}$ platí $T(t)D_0 \subset D_\alpha$, speciálně $T(t)f \in D(A^n)$ pro všechna $f \in L^2(\Omega)$, $t > 0$, $n \in \mathrm{N}$.

4. Ukažte, že pro každé $k \in \mathrm{N}$ existuje $C_k > 0$ takové, že $\|T(t)\|_{L(D_0,D_k)} = \|\frac{d^k}{dt^k}T(t)\| = \|A^k T(t)\| \leq C_k t^{-k} e^{-at}$ pro všechna $t \in (0,1)$.

Pozn: Předchozí tvrzení platí dokonce pro všechna reálná $k \in (0, +\infty)$.

5. Dokažte tvrzení 3 a 4 pro libovolný samoadjungovaný operátor A s kompaktní rezolventou na separabilním Hilbertově prostoru H, splňující $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \geq a\|u\|^2$ pro všechna $x \in D(A)$. Jak je v tomto případě definován A^α? Viz kapitolka 3.2 v [SY].