

Domácí úkol č. 1 - multiplikativní semigrupy

termín odevzdání: pondělí 5.3. (resp. 12.3.)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná, splňující $\operatorname{esssup}\{\operatorname{Re} m(x); x \in \Omega\} = K < +\infty$ (tj. $\operatorname{Re} m(x) \leq K$ s.v. v Ω a pro žádné menší K' to neplatí). Označme $(A_m, D(A_m))$ multiplikativní operátor na $L^p(\Omega, \mathbb{C})$, $1 \leq p < +\infty$, tj.

$$(A_m f)(x) := m(x)f(x), \quad D(A_m) := \{f \in L^p(\Omega, \mathbb{C}); mf \in L^p(\Omega, \mathbb{C})\}$$

a pro $t \geq 0$ bud' $S_m(t)$ operátor definovaný předpisem

$$(S_m(t)f)(x) := e^{tm(x)}f(x), \quad \text{pro } f \in L^p(\Omega, \mathbb{C}).$$

1. Ukažte, že $t \mapsto S_m(t)$ je C_0 -semigrupa.
2. Ukažte, že $(A_m, D(A_m))$ je jejím generátorem. [Např. pomocí Lebesgueovy věty a Věty: $f_n \rightarrow f$ v L^p normě, pak existuje vybraná, která konverguje k f skoro všude.]
3. Najděte tzv. mez růstu semigrupy S_m , tj.

$$\omega_0(S_m) := \inf\{\omega \in \mathbb{R}; \exists M \geq 1, \|S_m(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0\}.$$

4. **Nepovinně:** Najděte spektrum A_m , tj. množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, že $\lambda - A_m$ není bijekce $D(A_m)$ na $L^p(\Omega, \mathbb{C})$. Najděte spektrum $S_m(t)$. Všimněte si, jaký je vztah mezi spektrem generátoru, spektrem semigrupy a mezí růstu semigrupy.