

Zkoušková otázka z Matematiky I pro FSV

VZOR

1. Napište definici klíčového pojmu: *spojitost funkce na intervalu*.
2. Napište definice pojmů: *nerostoucí posloupnost* a *prstencové okolí bodu* a znění vět: *hustota racionálních a iracionálních čísel* a *druhá derivace a konvexita*.
3. Zformulujte a dokažte větu: *Bolzanova o nabývání mezíhodnot*.
4. Nechť $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Své závěry zdůvodněte a aspoň pro dvě implikace podrobně dokažte.
 1. f má v 0 lokální minimum,
 2. $f'(0) = 0$,
 3. $f'(0) = 0$ a $f''(0) > 0$,
 4. existuje $\delta > 0$ takové, že f je klesající na $(-\delta, 0)$ a rostoucí na $(0, \delta)$.

Řešení 4. otázky:

- 1 \Rightarrow 2. NE. Absolutní hodnota je protipříklad (derivace nemusí existovat).
- 1 \Rightarrow 3. NE. Absolutní hodnota je protipříklad.
- 1 \Rightarrow 4. NE. Například f konstantní je protipříkladem.
- 2 \Rightarrow 1. NE. x^3 je protipříklad.
- 2 \Rightarrow 3. NE. Druhá derivace nemusí být kladná, např. $-x^2$ nebo konstantní funkce.
- 2 \Rightarrow 4. NE. Konstantí funkce je protipříklad.
- 3 \Rightarrow 1. ANO. Plyne z $3 \Rightarrow 4$ a $4 \Rightarrow 1$ (dokázány níže).
- 3 \Rightarrow 2. ANO. Triviální.
- 3 \Rightarrow 4. ANO. Když je $f''(0) > 0$, musí být $f'(x) < f'(0) = 0$ na levém okolí nuly a $f'(x) > f'(0) = 0$ na pravém okolí nuly. Tj. f je klesající na levém okolí a rostoucí na pravém okolí nuly.
- 4 \Rightarrow 1. ANO. $f(x) > f(0)$ na $(-\delta, 0)$ (klesající) a $f(x) > f(0)$ na $(0, \delta)$ (rostoucí). Tedy v nule je dokonce ostré lokální minimum.
- 4 \Rightarrow 2. NE. Derivace nemusí existovat, např. absolutní hodnota.
- 4 \Rightarrow 3. NE. Derivace nemusí existovat, např. absolutní hodnota.