Řešené příklady ze starých zápočtových písemek

Úloha. *Najděte všechna reálná řešení rovnice*

$$\log_2^2 x - \log_2 x^3 = \log_2 16.$$

Řešení. *Neboť logaritmus je definovaný pouze pro kladné hodnoty dostáváme ihned podmínku na řešení $x > 0$. Dále si uvědomíme, že $\log_2 16 = 4$ a upravujeme následovně:*

$$\begin{aligned} \log_2^2 x - \log_2 x^3 &= \log_2 16 \\ (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 &= 0 \qquad \textit{subst. } y = \log_2 x \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ (y+1)(y-4) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy buďto $4 = y = \log_2 x \Rightarrow x = 16$ nebo $-1 = y = \log_2 x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Obě jsou větší než nula, a tedy řešením je $x = 16$ a $x = \frac{1}{2}$.

Úloha. *Najděte všechna reálná řešení nerovnice*

$$|x + |2x+1|| < 7.$$

Řešení. *Rozdělme na dva případy:*

- $x \geq -\frac{1}{2}$. *Pak $|x + |2x+1|| = |x + 2x + 1| = |3x+1|$, máme tedy nerovnost $|3x - (-1)| < 7$, neboli „vzdálenost $3x$ od bodu -1 je menší než sedm“, tj. $3x \in (-8, 6)$ a $x \in (-\frac{8}{3}, 2)$*
- $x < -\frac{1}{2}$. *Pak $|x + |2x+1|| = |x - 2x - 1| = |-x-1|$, tj. „vzdálenost $-x$ od bodu 1 je menší než sedm“, tj. $-x \in (-6, 8)$, tj. $x \in (-8, 6)$.*

Dohromady tedy

$$x \in \left([-\frac{1}{2}, \infty) \cap (-\frac{8}{3}, 2)\right) \cup \left((-\infty, -\frac{1}{2}) \cap (-8, 6)\right) \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, 2) \cup (-8, -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in (-8, 2).$$

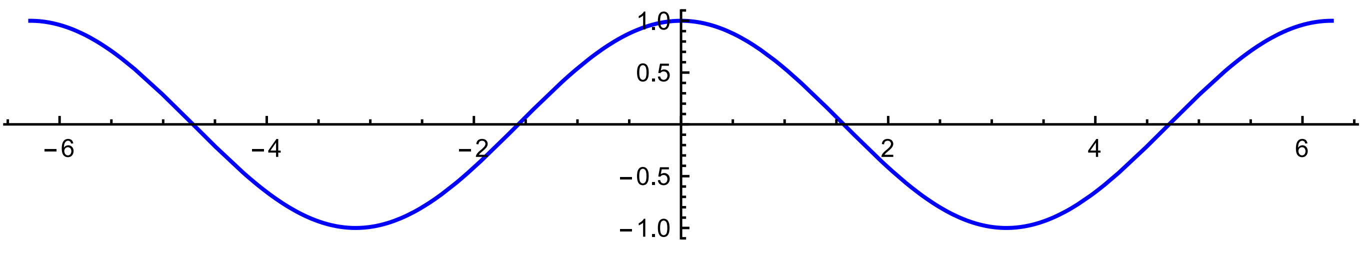
Řešení je $x \in (-8, 2)$.

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

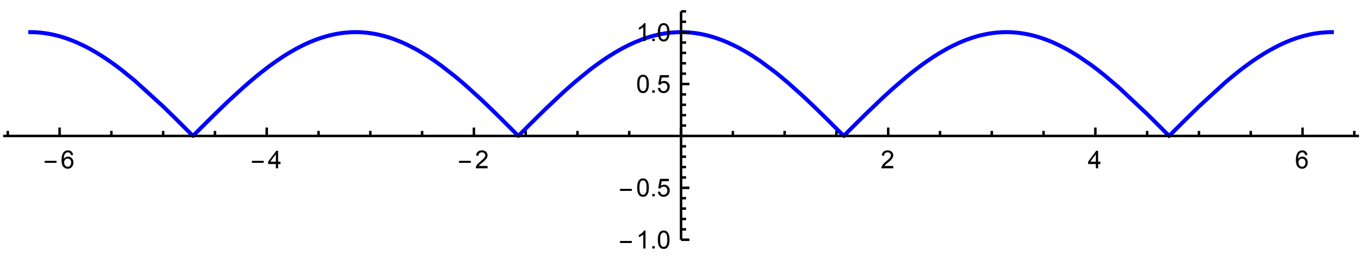
$$|\sin(x + \pi/2)| + 1.$$

Řešení. *Prostě se to nakreslí. Hodnota $+\frac{\pi}{2}$ posune graf sinu o pulkopeček doleva. Absolutní hodnota přehodí vše pod osou $y = 0$ nad ni a $+1$ posune poté celý graf o 1 ve směru osy y směrem nahoru. Postupně by grafy vypadaly následovně.*

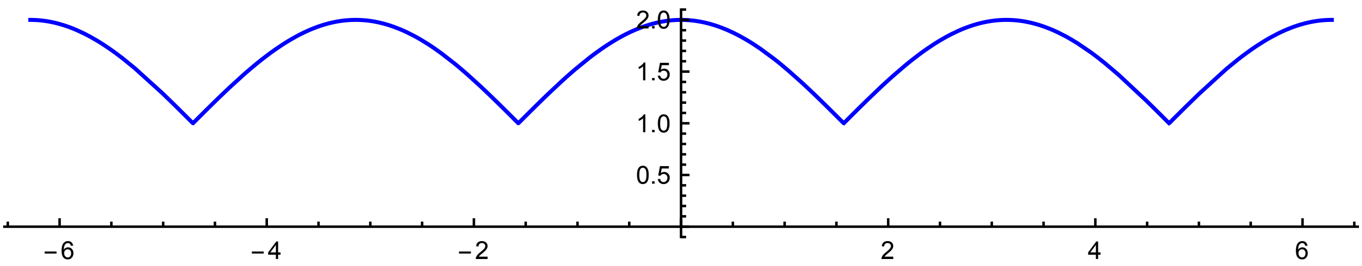
$\sin(x + \pi/2)$



$|\sin(x + \pi/2)|$



$$|\sin(x+\pi/2)|+1$$



Špičky jsou v bodech $[\frac{\pi}{2}+k\pi, 1],\ k \in \mathbb{Z}$, *a vrcholy oblouků v bodech* $[k\pi, 2],\ k \in \mathbb{Z}$.

Úloha. *Najděte všechna reálná řešení rovnice*

$$\log_5(x^2+2) - \log_5 x = \log_5 3.$$

Řešení. *Neboť logaritmus je definovaný pouze pro kladné hodnoty dostáváme ihned podmínku na řešení* $x > 0$. *Dále si uvědomíme, že* $0 = \log_5 1$ *a upravujeme následovně:*

$$\begin{aligned}
\log_5 x^2+2 - \log_5 x &= \log_5 3 \\
\log_5 \frac{x^2+2}{x} - \log_5 3 &= 0 \qquad \textit{můžeme dělit } x\textit{, neboť víme,že } x > 0 \\
\log_5 \frac{x^2+2}{3x} &= 0 \\
\frac{x^2+2}{3x} &= 1 \qquad \textit{můžeme násobit } x\textit{, neboť víme,že } x > 0 \\
x^2 - 3x + 2 &= 0 \\
(x-2)(x-1) &= 0
\end{aligned}$$

Tedy buďto $x = 1$ *nebo* $x = 2$. *Obě jsou větší než nula, a tedy řešením je* $x = 1$ *a* $x = 2$.

Úloha. *Najděte všechna reálná řešení nerovnice*

$$|x+3| + |2x-1| \geq 5.$$

Řešení. *Rozdělme na tři případy:*

$$\begin{aligned}
x \in (-\infty, -3) &\Rightarrow 5 \leq |x+3| + |2x-1| = -3x - 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3} \\
x \in [-3, \frac{1}{2}] &\Rightarrow 5 \leq |x+3| + |2x-1| = -x + 4 \Leftrightarrow x \leq -1 \\
x \in (\frac{1}{2}, \infty) &\Rightarrow 5 \leq |x+3| + |2x-1| = 3x + 2 \Leftrightarrow x \geq 1
\end{aligned}$$

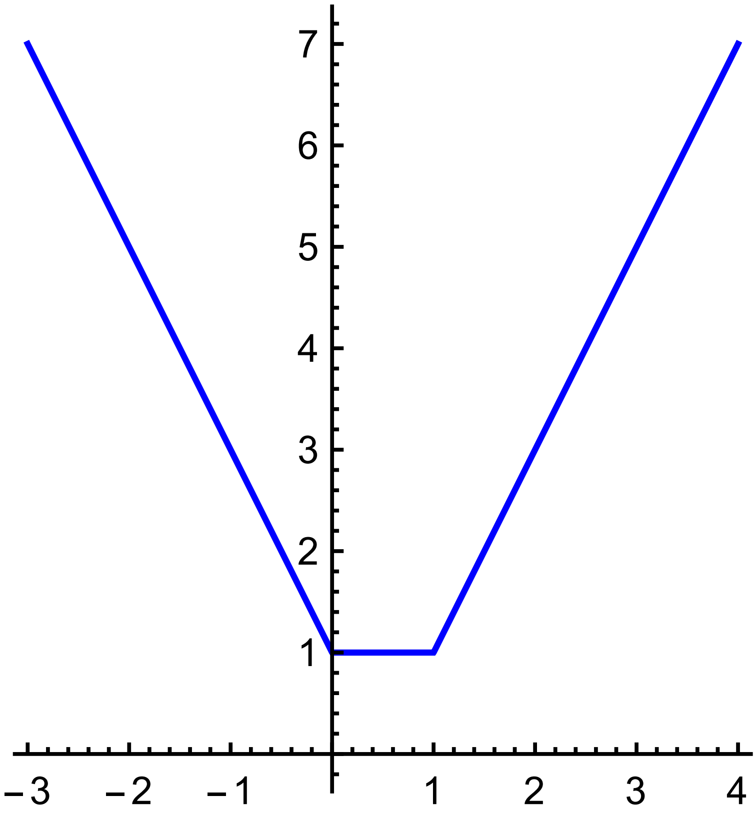
Dohromady tedy buďto $x \leq \frac{8}{3}$ *a* $x < -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3)$, *nebo* $x \leq -1$ *a* $x \in [-3, \frac{1}{2}] \Rightarrow x \in [-3, -1]$, *nebo* $x \geq 1$ *a* $x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in [1, \infty)$. *Úplně dohromady* $x \in (-\infty, -3) \cup [-3, -1] \cup [1, \infty) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. *Řešení je* $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

$$|x| + |x-1|\,.$$

Řešení. *Rozdělíme na tři podintervaly, na nich si funkci spočteme a poté na každém z nich nakreslíme.*

$$\begin{aligned}
x \in (-\infty, 0) &\Rightarrow |x| + |x-1| = -2x + 1 \\
x \in [0, 1] &\Rightarrow |x| + |x-1| = 1 \\
x \in (1, \infty) &\Rightarrow |x| + |x-1| = 2x - 1
\end{aligned}$$



Úloha. *V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x, pro která platí*

$$\log_2(|x| + c) \in (-1, 1\rangle.$$

Řešení. *Máme $\log_2(|x| + c) \in (-1, 1]$, právě když platí:*

$$\frac{1}{2} < |x| + c \leq 2,$$

což je to stejné jako

$$\frac{1}{2} - c < |x| \leq 2 - c.$$

- *Řešme nejprve levou nerovnost. Pro $c > \frac{1}{2}$ je splněna vždy, tj. $x \in \mathbb{R}$, pro $c \leq \frac{1}{2}$ jen pro $x \in (-\infty, c - \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} - c, \infty)$.*
- *Nyní řešme pravou nerovnost. Pokud $c > 2$, tak není splněna nikdy. Pokud $c \leq 2$ máme $x \in [c - 2, 2 - c]$*

Dohromady tedy:

- *Pro $c > 2$ máme prázdnou množinu řešení.*
- *Pro $c \in (\frac{1}{2}, 2]$ máme $x \in [c - 2, 2 - c]$ (z levé nerovnosti nemáme žádné omezení na x).*
- *Pro $c \leq \frac{1}{2}$ máme*

$$x \in [c-2, 2-c] \cap \left((-\infty, c - \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} - c, \infty) \right) = [c-2, c-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} - c, 2 - c]$$

Úloha. *Najděte všechna reálná x, pro která je definován výraz*

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4x - 7}{x - 3} + x}.$$

Řešení.

Výraz definovaný, právě když platí:

$$\frac{x^2+4x-7}{x-3}+x \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 3.$$

První podmínku upravíme (dáme na společný jmenovatel a rozložíme kvadratickou rovnici v čitateli):

$$\frac{x^2+4x-7}{x-3}+x=\frac{2x^2+x-7}{x-3}=\frac{(x-\frac{-1-\sqrt{57}}{4})(x-\frac{-1+\sqrt{57}}{4})}{x-3}$$

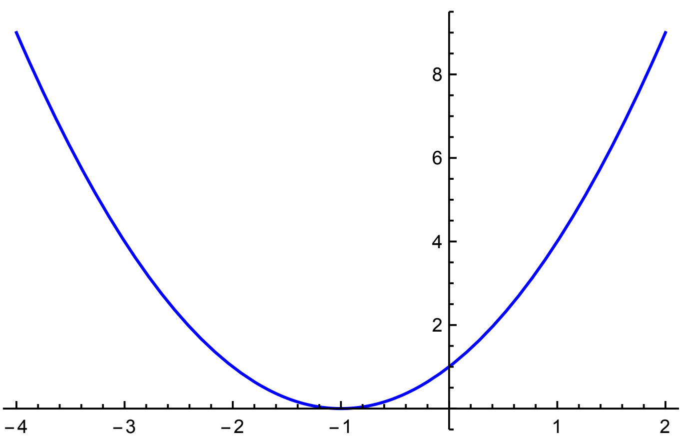
Platí tedy $\frac{x^2+4x-7}{x-3}+x \geq 0$*, právě když*
(a) $x-3>0$ *a* $(x-\frac{-1-\sqrt{57}}{4})(x-\frac{-1+\sqrt{57}}{4}) \geq 0$ *(tj.* $x \in (3,+\infty) \cap ((-\infty, \frac{-1-\sqrt{57}}{4}] \cup [\frac{-1+\sqrt{57}}{4}, +\infty))$*)*
nebo
(b) $x-3<0$ *a* $(x-\frac{-1-\sqrt{57}}{4})(x-\frac{-1+\sqrt{57}}{4}) \leq 0$ *(tj.* $x \in (-\infty,3) \cap [\frac{-1-\sqrt{57}}{4}), \frac{-1+\sqrt{57}}{4}]$*).*
Protože $\sqrt{57} \in (7,8)$*, máme* $\frac{-1-\sqrt{57}}{4} \in (-2\frac{1}{4},-2)$ *a* $\frac{-1+\sqrt{57}}{4} \in (\frac{6}{4},\frac{7}{4})$*, takže oba zlomky jsou menší než* 3*. Z případu (a) tedy dostáváme* $x \in (3,+\infty)$ *a z případu (b)* $x \in [\frac{-1-\sqrt{57}}{4}), \frac{-1+\sqrt{57}}{4}]$*. Řešení tedy je* $x \in [\frac{-1-\sqrt{57}}{4}, \frac{-1+\sqrt{57}}{4}] \cup (3,\infty)$*.*

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

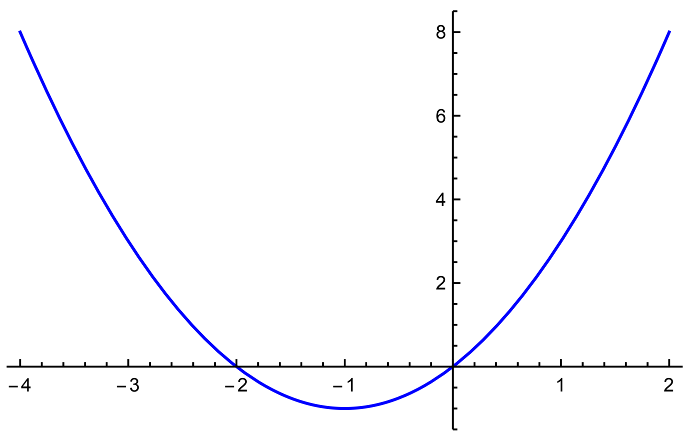
$$f(x)=1-\left|(x+1)^2-1\right|.$$

Řešení. *Prostě se to nakreslí.* $(x+1)^2$ *je parabola směrem nahoru s minimem v bodě* $[-1,0]$*. -1 uvnitř absolutní hodnoty ji posune kus pod osu* x*. Absolutní hodnota potom převrátí ten kus pod osou* x *nad osu* x*. Mínus před absolutní hodnotou potom překlopí graf podle osy* x *a konečně jednička před absolutní hodnotou ho kus posune nad osu* x*. Výsledek je:*

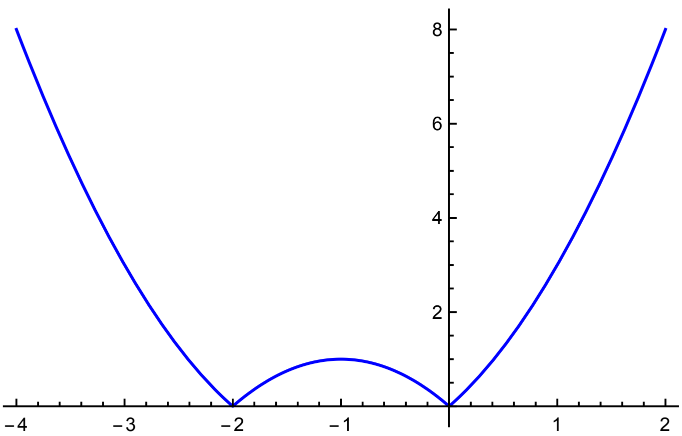
$(x+1)^2$



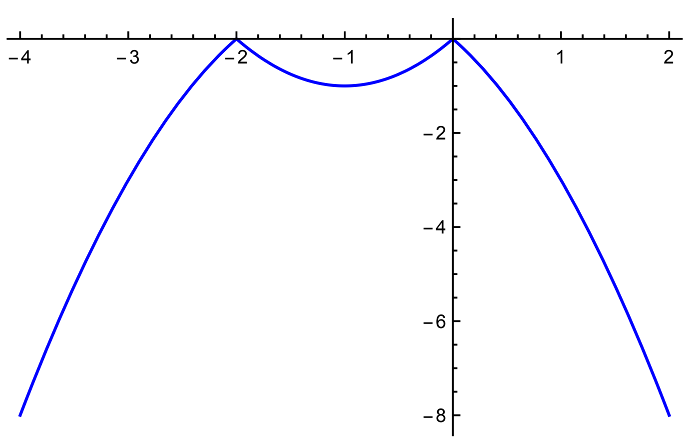
$(x+1)^2-1$



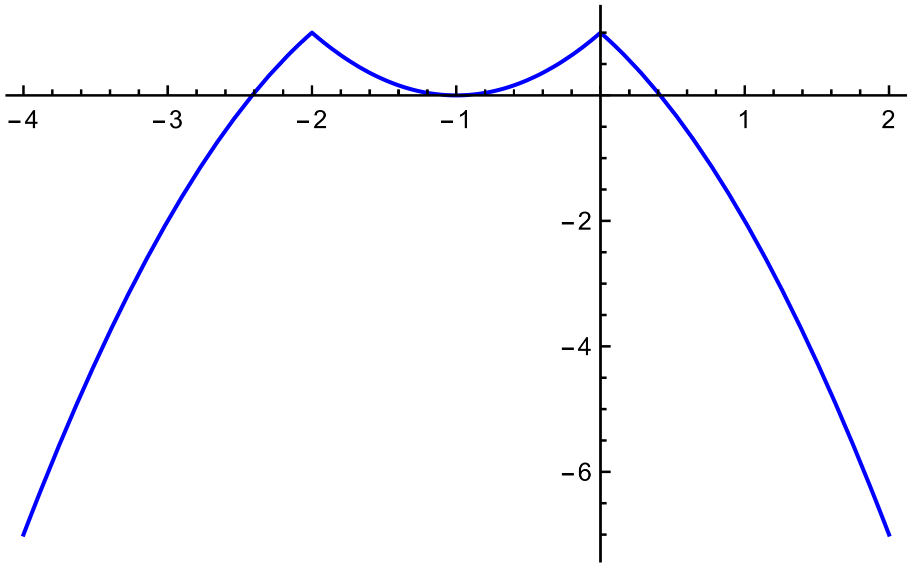
$|(x+1)^2-1|$



$-|(x+1)^2-1|$



$1-|(x+1)^2-1|$



Průsečíky s osou x jsou v $-1-\sqrt{2}$, -1, $-1+\sqrt{3}$ a špičky grafu v bodě $[-2,1]$ a $[0,1]$.

Úloha. *V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x, pro která platí*

$$c3^{2x+1}+1 \in (0,10\rangle.$$

Řešení. $c3^{2x+1}+1 \in (0,10]$ *je ekvivalentní s*

$$0 < c3^{2x+1}+1 \leq 10,$$

což je to stejné jako

$$-1 < c3^{2x+1} \leq 9. \tag{1}$$

Protože nyní potřebujeme dělit céčkem je třeba rozdělit úlohu na 3 možnosti:

- $c=0$. *Při této volbě dostáváme $-1<0\leq 9$, což je splněno pro každé x.*
- $c>0$. *Vydělením rovnice (1) céčkem dostáváme:*

$$\frac{-1}{c} < 3^{2x+1} \leq \frac{9}{c}$$

Protože $\frac{-1}{c}<0$, je levá nerovnost splněna pro všechna x a z pravé nerovnosti dostáváme:

$$3^{2x+1} \leq \frac{9}{c} \Leftrightarrow 2x+1 \leq \log_3(9)-\log_3(c) \Leftrightarrow 2x+1 \leq 2-\log_3(c) \Leftrightarrow x \leq \frac{1-\log_3(c)}{2}$$

- $c<0$. *Vydělením rovnice (1) céčkem dostáváme:*

$$\frac{-1}{c} > 3^{2x+1} \geq \frac{9}{c}$$

Protože $\frac{9}{c}<0$ je pravá nerovnost splněna pro všechna x a z levé nerovnosti dostáváme:

$$3^{2x+1} < -\frac{1}{c} \Leftrightarrow 2x+1 < \log_3(1)-\log_3(-c) \Leftrightarrow x < \frac{-1-\log_3(-c)}{2}$$

Zde se nenecháme zmást, že uvnitř logaritmu máme $-\frac{1}{c}$ (pro $c<0$ je to v pořádku).

Dohromady tedy:

- *Pro $c<0$ máme*

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\log_3(-c)}{2}\right)$$

- *Pro* $c = 0$ *máme* $x \in \mathbb{R}$.
- *Pro* $c > 0$ *máme*
$$x \in \left(-\infty, \frac{1 - \log_3(c)}{2}\right]$$

Úloha. *Najděte všechna reálná* x*, pro která je definován výraz*

$$\log_4\left(\sqrt{x^2 + 3x - 5} - x\right).$$

Řešení. *Výraz je definovaný právě když platí:*

$$x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \textit{a} \quad \sqrt{x^2 + 3x - 5} - x > 0$$

Z první podmínky vyřešením kvadratické nerovnosti dostáváme:

$$x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}, \infty\right)$$

Druhou podmínku nejprve upravíme do tvaru

$$\sqrt{x^2 + 3x - 5} > x.$$

Nyní si všimneme, že protože je nalevo odmocnina, která je vždy nezáporná, tak pro $x < 0$ *je podmínka splněna. Pro* $x \geq 0$ *dále upravujeme umocněním, které si právě díky omezení na* $x \geq 0$ *můžeme dovolit bez toho aniž bychom ztratili nebo získali nějaká řešení:*

$$\sqrt{x^2 + 3x - 5} > x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 > x^2 \Leftrightarrow 3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$$

Z druhé podmínky tedy celkem dostáváme, že buď to je $x < 0$ *nebo* $x \geq 0$ *a* $x > \frac{5}{3}$*, což znamená:*

$$x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$$

Výsledkem je potom průnik první a druhé podmínky

$$x \in \left(\left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}, \infty\right)\right) \cap \left((-\infty, 0) \cup (\frac{5}{3}, \infty)\right),$$

což je přesně

$$x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$$

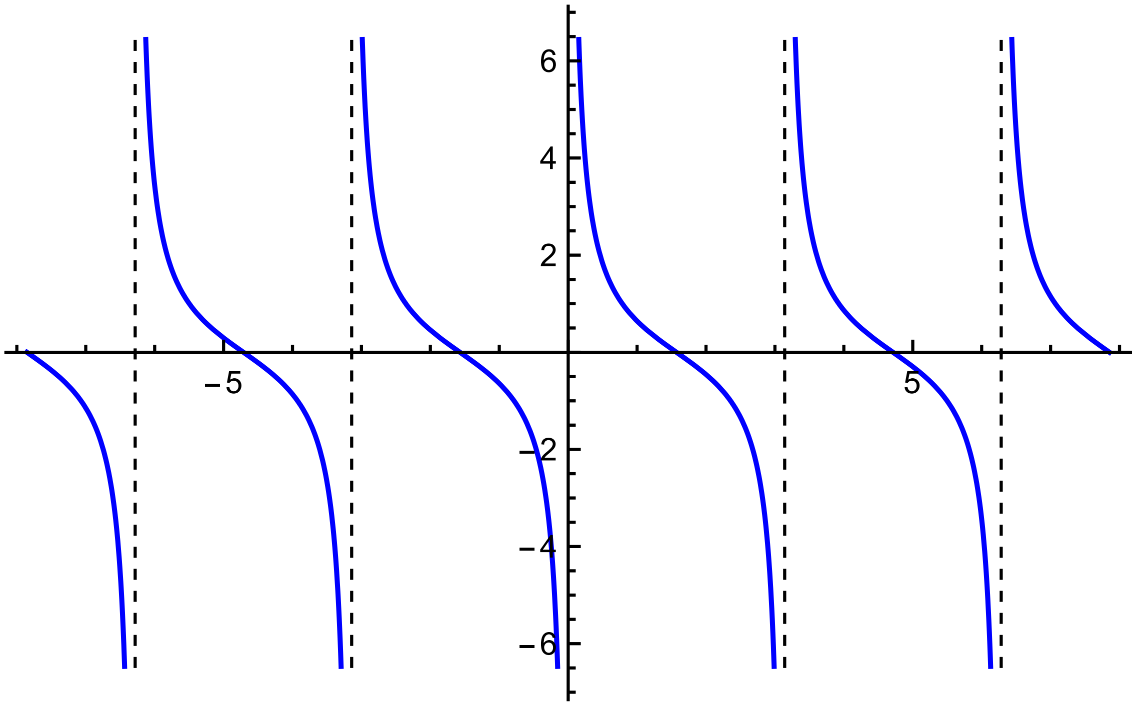
(zde je třeba si uvědomit, že $\frac{-3+\sqrt{29}}{2} < \frac{5}{3}$*, což je pravda, neboť* $\sqrt{29} < \frac{2 \cdot 5}{3} + 3 =$*).*

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

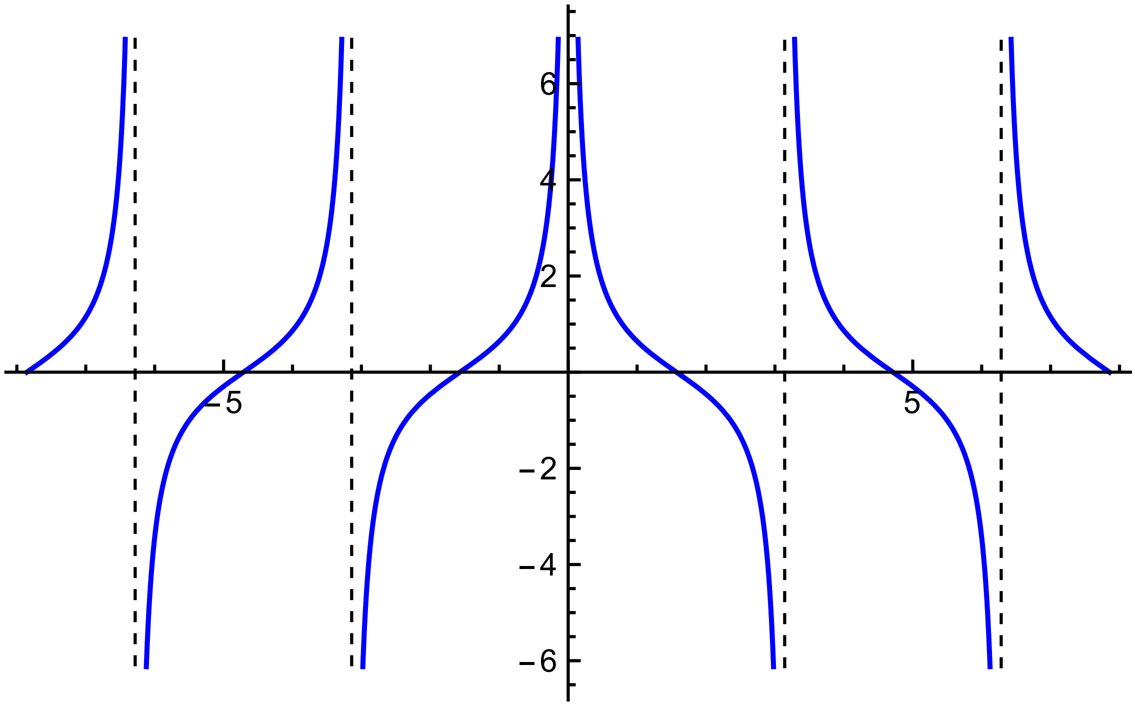
$$f(x) = \operatorname{cotg}\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešení. *Prostě se to nakreslí. Absolutní hodnota u* x *udělá z grafu kotangens sudou funkci a* $\frac{\pi}{2}$ *posune polovinu grafu pro kladná* x *doleva o* $\frac{\pi}{2}$ *a polovinu grafu pro záporná* x *doprava o* $\frac{\pi}{2}$.

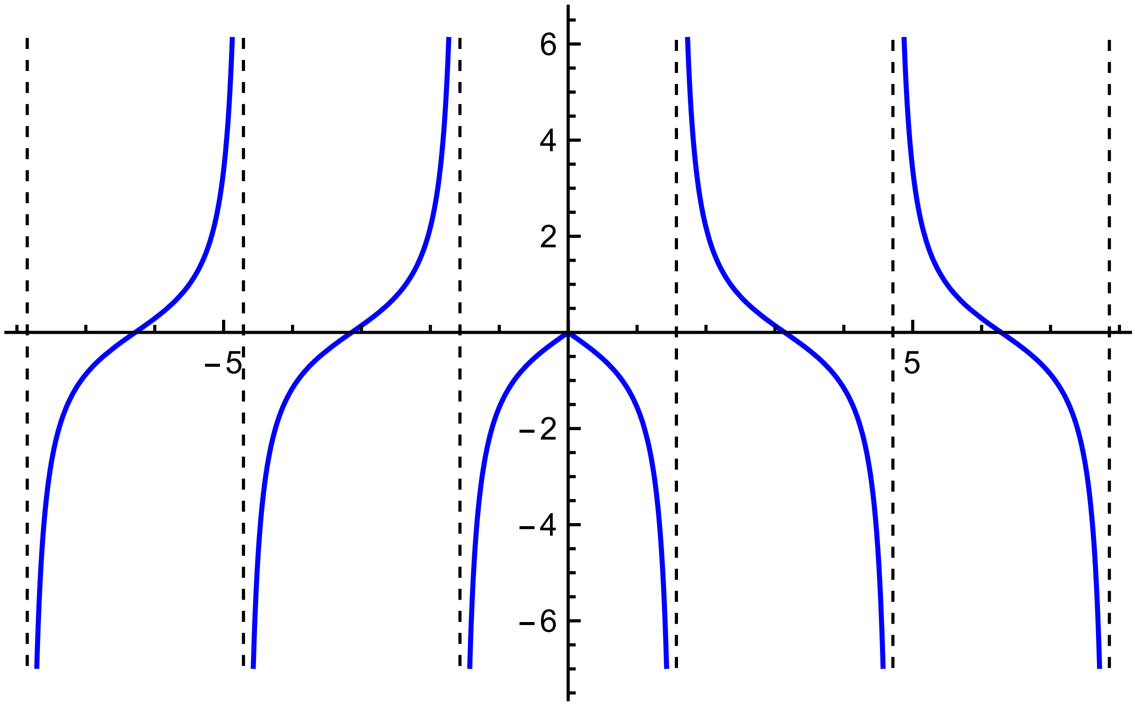
$$\operatorname{cotg}(x)$$



$\mathrm{cotg}(|x|)$



$\mathrm{cotg}(|x| + \frac{\pi}{2})$



Průsečíky s osou x jsou v $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a svislé čárkované čáry procházeji $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Úloha. *V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x, pro která platí*

$$\left|\log_2(x^2 + 2c)\right| \in (-\infty, 2).$$

Řešení. *Máme vyřešit nerovnost*

$$|\log_2(x^2 + 2c)| < 2, \quad \textit{neboli} \quad -2 < \log_2(x^2 + 2c) < 2$$

Uvědomme si nejprve, že logaritmus je definován v následujících případech: je-li $c > 0$, tak pro všechna x, je-li $c \le 0$, tak jen pro $x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \cup (\sqrt{-2c}, +\infty)$. Pokud je logaritmus definován, můžeme nerovnosti upravit na $\log_2(\frac{1}{4}) < \log_2(x^2 + 2c) < \log_2(4)$ a dále na $\frac{1}{4} < x^2 + 2c < 4$. Zde si všimneme, že pokud x splňuje tyto nerovnosti, pak je $\log(x^2 + 2c)$ určitě definován. Stačí tedy vyřešit (po odečtení $2c$) nerovnosti

$$\frac{1}{4} - 2c < x^2 < 4 - 2c.$$

- *Řešme levou nerovnost. Je-li $c > \frac{1}{8}$, pak je splněna vždy. Pro $c \le \frac{1}{8}$ jen pro $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1}{4} - 2c}) \cup (\sqrt{\frac{1}{4} - 2c}, +\infty)$.*
- *Řešme pravou nerovnost. Je-li $c \ge 2$, pak není splněna nikdy. Pro $c < 2$ má řešení $x \in (-\sqrt{4 - 2c}, \sqrt{4 - 2c})$.*

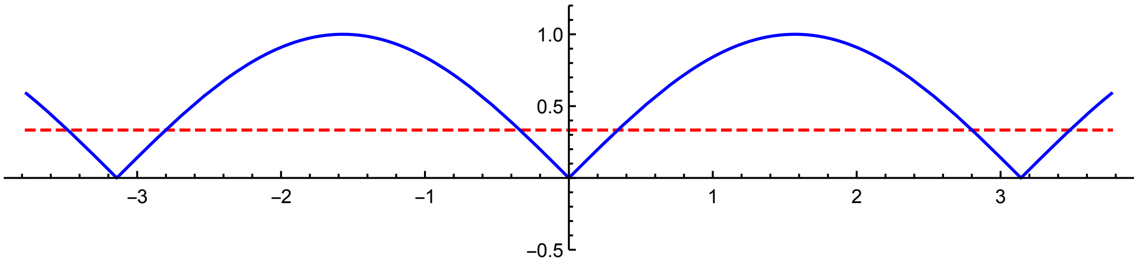
Dáme-li vše dohromady, získáme výsledek:

- *Pro $c \ge 2$ máme prázdnou množinu řešení.*
- *Pro $c \in (\frac{1}{8}, 2)$ máme $x \in (-\sqrt{4 - 2c}, \sqrt{4 - 2c})$ (z pravé nerovnosti nemáme žádnou omezující podmínku).*
- *Pro $c \le \frac{1}{8}$ je $x \in \Big((-\infty, -\sqrt{\frac{1}{4} - 2c}) \cup (\sqrt{\frac{1}{4} - 2c}, \infty)\Big) \cap (-\sqrt{4 - 2c}, \sqrt{4 - 2c})$*
  $$= \Big(-\sqrt{4 - 2c}, -\sqrt{\tfrac{1}{4} - 2c}\Big) \cup \Big(\sqrt{\tfrac{1}{4} - 2c}, \sqrt{4 - 2c}\Big).$$

Úloha. *Najděte všechna reálná x, pro která platí*

$$|\sin(3x - 2)| > \frac{1}{3}.$$

Řešení. *Řešme nejprve nerovnici $|\sin y| > \frac{1}{3}$ a pro lepší představu si nakresleme obrázek:*



Vidíme, že nerovnost platí pro $y \in (\arcsin\frac{1}{3} + k\pi, \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k\pi)$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. Podrobněji: funkce* $|\sin y|$ *je* π*-periodická, stačí tedy úlohu vyřešit na* $[0, \pi)$*, tam je* $\sin y$ *kladný, můžeme tedy odstranit absolutní hodnotu. Na* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *je navíc rostoucí a má inverzní funkci nazývanou* $\arcsin$*, máme tedy*

$$\sin y > \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y > \arcsin\frac{1}{3} \quad \textit{na } [0, \frac{\pi}{2}].$$

Na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ *dostáváme ze symetrie, která je vidět z obrázku, řešení* $y < \pi - \arcsin\frac{1}{3}$ *(jedná se o symetrii* $\sin y = \sin(\pi - y)$*). Dohromady tedy na* $(0, \pi)$ *máme řešení* $y \in (\arcsin\frac{1}{3}, \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3})$ *a vezmeme-li v úvahu* π*-periodicitu, pak získáme výše uvedený výsledek* $y \in (\arcsin\frac{1}{3} + k\pi, \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k\pi)$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Nyní stačí najít všechna x*, pro která* $y = 3x - 2 \in (\arcsin\frac{1}{3} + k\pi, \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k\pi)$*. Po přičtení dvojky a vydělení třemi máme*

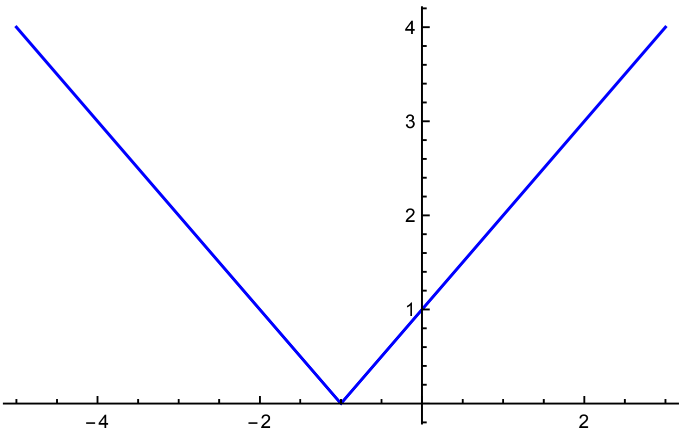
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{1}{3}(\arcsin\frac{1}{3} + k\pi + 2), \frac{1}{3}(\pi - \arcsin\frac{1}{3} + k\pi + 2)).$$

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

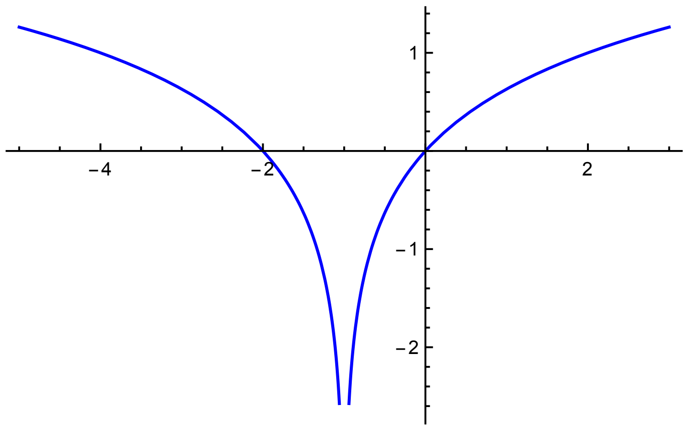
$$f(x) = |\log_3 |x+1|| - 1.$$

Řešení. *V hlavě pomocí představ nebo pomocí postupného kreslení můžeme postupovat třeba takto:*

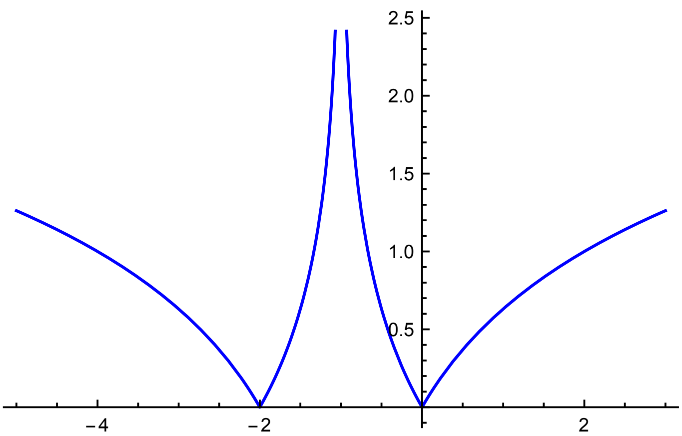
$|x+1|$



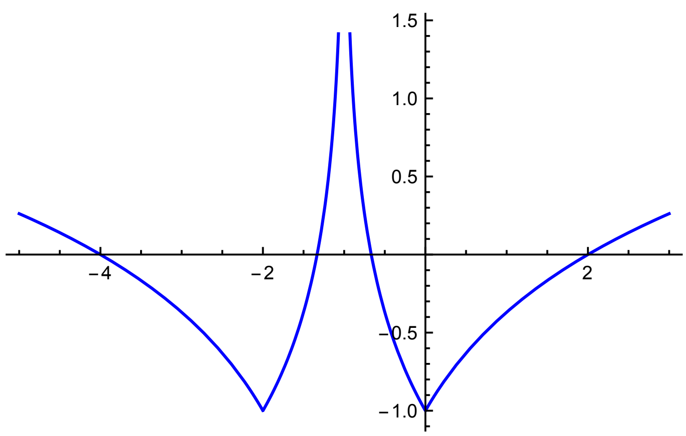
$\log_3(|x+1|)$



$|\log_3(|x+1|)|$



$|\log_3(|x+1|)| - 1$



Průsečíky s osou x spočteme následovně:

$$|\log_3(|x+1|)| = 0 \Leftrightarrow |x+1| \in \{3, \frac{1}{3}\} \Leftrightarrow x \in \{2, -4, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\}$$

Graf jde do kladného nekonečna pro $x = -1$.

Úloha. *V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x, pro která platí*

$$\log_3(x^4 - 3c) \in (-1, 3\rangle.$$

Řešení. *Máme vyřešit nerovnice $-1 < \log_3(x^4 - 3c) \leq 3$, což je ekvivalentní s $\log_3(\frac{1}{3}) < \log_3(x^4 - 3c) \leq \log_3(27)$ a po odlogaritmování (ekvivalentní úprava) $\frac{1}{3} < x^4 - 3c \leq 27$ a přičtení $3c$*

$$\frac{1}{3} + 3c < x^4 \leq 27 + 3c.$$

- *Řešme levou nerovnost: pro $c < -\frac{1}{9}$ je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro $c \geq -\frac{1}{9}$ jen pro $x \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}, \infty\right)$.*
- *Řešme nyní pravou nerovnost: pro $c < -9$ není splněna pro žádné x, pro $c \geq -9$ je splněna pro $x \in \left(-\sqrt[4]{27 + 3c}, \sqrt[4]{27 + 3c}\right)$.*

Výsledek je nyní

- *Pro $c < -9$ máme prázdnou množinu řešení.*
- *Pro $c \in [-9, -\frac{1}{9})$ máme $x \in [-\sqrt[4]{27 + 3c}, \sqrt[4]{27 + 3c}]$ (z levé nerovnosti nemáme žádné omezení na x).*
- *Pro $c \geq -\frac{1}{9}$ je*

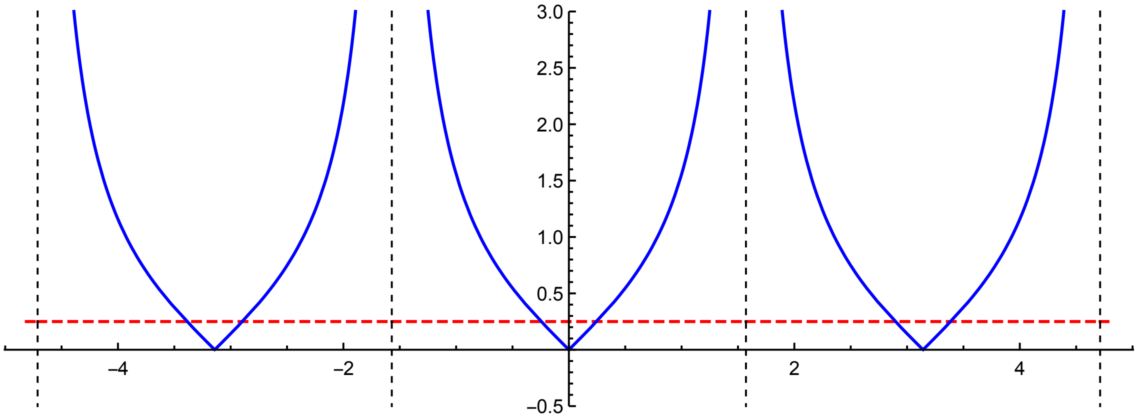
$$x \in \left((-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}) \cup (\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}, \infty)\right) \cap [-\sqrt[4]{27 + 3c}, \sqrt[4]{27 + 3c}]$$

$$= \left[-\sqrt[4]{27 + 3c}, -\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3} + 3c}, \sqrt[4]{27 + 3c}\right].$$

Úloha. *Najděte všechna reálná x, pro která platí*

$$|\mathrm{tg}(2x + 1)| \leq \frac{1}{4}.$$

Řešení. *Načrtněme si obrázek funkce $|\mathrm{tg}\, y|$ a s jeho pomocí vyřešme nerovnici $|\mathrm{tg}\, y| \leq \frac{1}{4}$.*



Z obrázku vidíme, že řešením je $y \in (-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Podrobněji: Díky π-periodičnosti stačí úlohu řešit na $(0, \pi)$ a díky sudosti vlastně jen na $(0, \frac{\pi}{2})$. Tam jsou funkce tg *a* arctg *navzájem inverzní,* tg *je nezáporný a rostoucí a tedy*

$$|\operatorname{tg} y| \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{4}.$$

Řešení $y \in [0, \operatorname{arctg}\frac{1}{4}]$ na $[0, \frac{\pi}{2})$ a symetrie nám dá řešení $y \in [-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}, \operatorname{arctg}\frac{1}{4}]$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a periodičnost pak

$$y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi].$$

Nyní stačí najít množinu všech x, která splňují $y = 2x + 1 \in [-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi]$. Odečtením jedničky a vydělením dvěma získáme

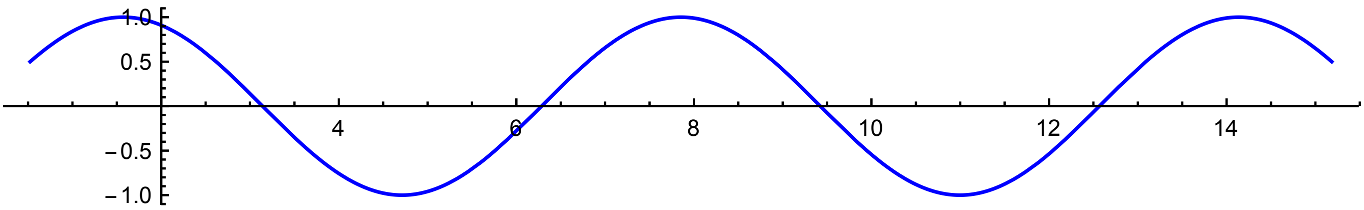
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\frac{1}{2}(-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi - 1), \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi - 1)].$$

Úloha. *Načrtněte graf funkce*

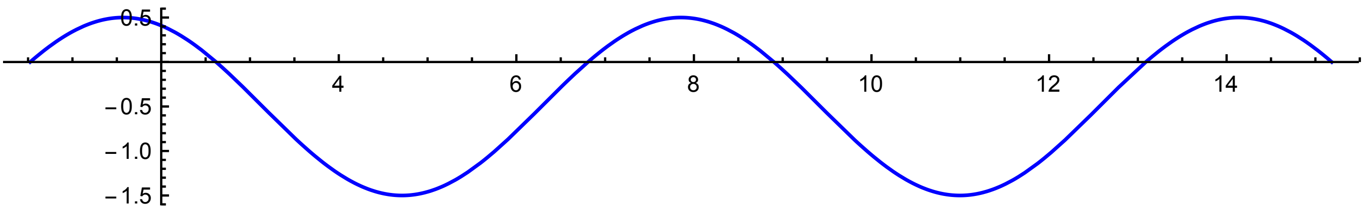
$$f(x) = \left|\sin x - \log_2 \sqrt{2}\right|.$$

Řešení. *Nejprve si uvědomíme, že $\log_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$. Poté v hlavě pomocí představ nebo pomocí postupného kreslení můžeme postupovat třeba takto:*

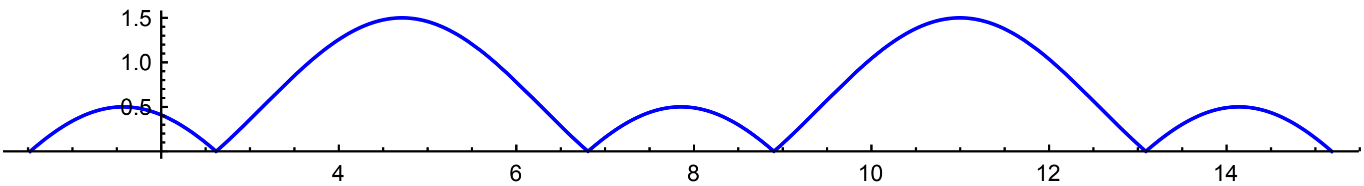
$\sin(x)$



$\sin(x) - \dfrac{1}{2}$



$|\sin(x) - \dfrac{1}{2}|$



Průsečíky s osou x spočteme následovně:

$$|\sin x - \frac{1}{2}| = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ nebo } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vcholky kopečků grafu jsou v bodech $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{1}{2}],\ k \in \mathbb{Z}$, a $[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}],\ k \in \mathbb{Z}$.