IV. Funkce jedné proměnné

IV.1. Základní pojmy

Definice. *Funkce f jedné reálné proměnné* (dále jen *funkce*) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je *rostoucí* na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci *klesající* (*neklesající*, *nerostoucí*) na intervalu J.

Definice. *Monotónní funkcí* (resp. *ryze monotónní funkcí*) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- *shora omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- *zdola omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- *omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- *lichá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- *sudá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- *periodická s periodou a*, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

IV.2. Limita funkce

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu c* o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- *prstencové okolí bodu c* o poloměru ε jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 20 (jednoznačnost limity)**.** *Funkce f má v libovolné bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.*

Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$*, jestliže platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě c, právě když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in B(c, \delta)\colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Definice. Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je *limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 20 platí i pro $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, tedy lze použít označení $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *pravé okolí bodu c* jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- *levé okolí bodu c* jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,

- *pravé prstencové okolí bodu* c jako $P^+(c,\varepsilon) = (c, c+\varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu* c jako $P^-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c)$,
- *levé okolí bodu* $+\infty$ jako $B^-(+\infty,\varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- *pravé okolí bodu* $-\infty$ jako $B^+(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu* $+\infty$ jako $P^-(+\infty,\varepsilon) = B^-(+\infty,\varepsilon)$,
- *pravé prstencové okolí bodu* $-\infty$ jako $P^+(-\infty,\varepsilon) = B^+(-\infty,\varepsilon)$.

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c *limitu zprava* rovnou A (značíme $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = A$), jestliže
$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \;\exists\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \;\forall x \in P^+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$
Analogicky definujeme pojem *limity zleva* v bodě $c \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$.

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak platí
$$\lim_{x\to c} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to c+} f(x) = A \;\;\&\;\; \lim_{x\to c-} f(x) = A\right).$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c *spojitá zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).

Věta 21. *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.*

Věta 22 (aritmetika limit)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

Důsledek. *Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c. Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě c.*

Věta 23. *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c,\eta)$, pak $\lim_{x\to c}\big(f(x)/g(x)\big) = +\infty$.*

Definice. *Polynomem* budeme rozumět každou funkci P tvaru
$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
kde $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu P*.

Poznámka. Nechť $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a
$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},\\ Q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže se polynomy P a Q rovnají (tj. $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak $n = m$ a $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$.

Definice. Nechť P je polynom tvaru
$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Řekneme, že P je polynom *stupně n*, jestliže $a_n \neq 0$. Stupeň *nulového polynomu* (tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$) definujeme jako -1.

Věta 24 (limita a uspořádání)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$.*
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) > g(x).$$
(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \le g(x)$, potom platí
$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$
(iii) (o dvou policajtech) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c,\eta)\colon f(x) \le h(x) \le g(x).$$
Je-li navíc $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důsledek. *Nechť* $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ *a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že* g *je omezená na* $P(c,\eta)$. *Potom* $\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = 0$.

Věta 25 (limita složené funkce)**.** *Nechť* $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta)\colon g(x) \neq A$,

(S) funkce f *je spojitá v bodě* A.

Potom

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

Důsledek. *Nechť funkce* g *je spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *je spojitá v bodě* $g(c)$. *Potom je funkce* $f \circ g$ *spojitá v bodě* c.

Věta 26 (jednostranná limita složené funkce)**.** *Nechť* $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c-} g(x) = A$, $\lim_{y\to A+} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P^-(c,\eta)\colon g(x) > A$,

(S) funkce f *je spojitá v bodě* A *zprava a* $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P^-(c,\eta)\colon g(x) \geq A$.

Potom

$$\lim_{x\to c-} f\big(g(x)\big) = B.$$

Věta 27 (Heine – polovina)**.** *Nechť* $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ *a pro funkci* f *platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$. *Jestliže posloupnost* $\{x_n\}$ *splňuje* $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *pak platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 28 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. *Budiž funkce* f *monotónní na intervalu* (a,b). *Potom existují* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x)$, *přičemž platí:*

- *Je-li* f *na* (a,b) *neklesající, pak* $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f\big((a,b)\big)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f\big((a,b)\big)$.
- *Je-li* f *na* (a,b) *nerostoucí, pak* $\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f\big((a,b)\big)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f\big((a,b)\big)$.

IV.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je *spojitá na intervalu* J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 29 (Bolzano, o nabývání mezihodnot)**.** *Budiž funkce* f *spojitá na intervalu* $\langle a,b\rangle$ *a předpokládejme, že* $f(a) < f(b)$. *Potom pro každé* $C \in (f(a), f(b))$ *existuje* $\xi \in (a,b)$ *takové, že platí* $f(\xi) = C$.

Věta 30 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť* J *je interval a funkce* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* J. *Potom je* $f(J)$ *interval.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x *maxima* (resp. *minima*) *na* M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme *bodem maxima* (resp. *minima*) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body *extrému*.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- *lokální maximum vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,
- *lokální minimum vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)$,
- *ostré lokální maximum vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) < f(x)$,
- *ostré lokální minimum vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) > f(x)$.

Bodem *lokálního extrému* rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 31 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a,b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

Důsledek 32 (omezenost spojité funkce)**.** *Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom je f na $\langle a,b\rangle$ omezená.*

Věta 33 (spojitost inverzní funkce)**.** *Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

IV.4. Zavedení elementárních funkcí

Věta 34 (zavedení logaritmu)**.** *Existuje jediná funkce (značíme ji* $\log$ *a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0,+\infty)$,

(L2) funkce $\log$ *je na* $(0,+\infty)$ *rostoucí,*

(L3) $\forall x,y \in (0,+\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y$,

(L4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0,+\infty)\colon\ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0,+\infty)\colon\ \log x^n = n\log x$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce $\log$ je spojitá na $(0,+\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,
- existuje právě jedno číslo $e \in (0,+\infty)$ splňující $\log e = 1$.

Definice. *Exponenciální funkcí* budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0,+\infty)$,
- funkce $\exp$ je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x,y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
- $\forall r \in \mathbb{Q}\colon\ \exp r = e^r$.

Definice. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Obecnou mocninu* a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b\log a).$$

Definice. Nechť $a,b \in (0,+\infty)$, $a \neq 1$. *Obecný logaritmus* $\log_a b$ definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

Věta 35 (zavedení funkce sinus a čísla π). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit* $\sin$*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkcí *kosinus* rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce $\cos$ je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce $\cos$ je sudá, funkce $\sin$ je lichá.
- Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce $\sin$ je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkce $\cos$ je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice. Funkci *tangens* značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci *kotangens*, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\operatorname{tg}} = H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$

Definice.

- Funkcí *arkussinus* (značíme $\arcsin$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.
- Funkcí *arkuskosinus* (značíme $\arccos$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}$.
- Funkcí *arkustangens* (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí *arkuskotangens* (značíme $\operatorname{arccotg}$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = \langle -1, 1\rangle$, $D_{\operatorname{arctg}} = D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce $\arcsin$ a arctg jsou liché.
- Funkce $\arcsin$ a arctg jsou rostoucí, funkce $\arccos$ a $\operatorname{arccotg}$ jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce $\arcsin$, $\arccos$, arctg a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1\rangle\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

IV.5. Derivace funkce

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- *derivací funkce f v bodě a* budeme rozumět
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
- *derivací funkce f v bodě a zprava* budeme rozumět
$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
- *derivací funkce f v bodě a zleva* budeme rozumět
$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

  pokud příslušné limity existují.

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. *Tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$* nazveme přímku
$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\right\}.$$

Věta 36. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Věta 37 (aritmetika derivací)**.** *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iv) je-li $g(a) \neq 0$, pak
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 38 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak*
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 39 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 40 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.*

IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

Věta 41 (Rolle)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:*

(i) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

(ii) má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),

(iii) platí, že $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = 0$.

Věta 42 (Lagrange, o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako* $\operatorname{Int} J$*) má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Věta 44 (výpočet jednostranné derivace)**.** *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

IV.7. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- *konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

- *konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

- *ryze konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

- *ryze konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Lemma 46. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Definice. Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. *Druhou derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$-*ní derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Věta 47 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.*

(i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží pod tečnou* T_a, jestliže
$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$
Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží nad tečnou* T_a.

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 48 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 49 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z)\colon f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)\colon f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

IV.8. Průběh funkce

Definice. Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme *asymptotou funkce f* v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - q) = 0).$$

Tvrzení 50. *Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto kx + q$, právě tehdy, když*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.